

INF155: Informática Teórica

Clase 4: Autómatas Finitos

Aldo Berrios Valenzuela

Jueves 17 de Marzo de 2016

1. Autómatas Finitos Deterministas II

Definición 1.1. Una descripción instantánea de un DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es:

$$\alpha q \beta \tag{1.1}$$

Con $\alpha, \beta \in \Sigma^*, q \in Q$

Idea M leyó α , está en el estado q y le queda leer β .

Definición 1.2. Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definimos la relación de transición de M entre descripciones instantáneas (IDs) de M por:

$$\alpha q x \beta \vdash_M \alpha x p \beta \quad ; \text{ para todo } \alpha, \beta \in \Sigma^* \text{ tal que } \delta(q, x) = p \tag{1.2}$$

Normalmente escribimos simplemente \vdash porque siempre hablamos del mismo autómata.

Definición 1.3. Sea $R \subseteq A \times A$ una relación. La clausura transitiva de R , R^+ es la misma relación que incluye a R que es transitiva. La clausura reflexiva y transitiva de R , R^* , es la mínima relación que es reflexiva y transitiva que contiene a R .

En la práctica:

- aR^+b : De a llego a b en 1 o más pasos de R (con sucesiones se interpreta como el “mayor que”)
- aR^*b : De a llego a b en 0 o más pasos de R . (con sucesiones se interpreta como el “mayor o igual que”)

Definición 1.4. Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. El lenguaje aceptado por M es:

$$\mathcal{L}(M) = \{\sigma : q_0 \sigma \vdash_M^* \sigma q_f \wedge q_f \in F\} \tag{1.3}$$

Este es equivalente a lo anterior.

EQVA Convensace de ello...

2. Autómatas Finitos No Deterministas (NFA)

Definición 2.1. Un autómata finito no determinista (NFA):

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \tag{2.1}$$

consta de:

- Q : conjunto finito de estados.
- Σ : alfabeto.
- δ : función de transición, $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$, donde 2^Q es el conjunto de potencia.
- q_0 : estado inicial, $q_0 \in Q$
- F : estados finales, $F \subseteq Q$

Notar que las movidas no están determinadas. La idea es que M acepte si hay una secuencia de movidas en las que consume la palabra y termina en un estado final.

Definición 2.2. Definimos ID para NFA igual que para DFA.

Definición 2.3. Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Definimos la relación de transición de M entre IDs de M mediante:

- I. $\alpha q \beta \vdash_M \alpha p \beta$, si $p \in \delta(q, \epsilon)$
- II. $\alpha q x \beta \vdash_M \alpha x p \beta$ si $p \in \delta(q, x)$

Donde $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, $p, q \in Q$, $x \in \Sigma$.

Definición 2.4. Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. El lenguaje aceptado por M es:

$$\mathcal{L}(M) = \{\sigma : q_0 \sigma \vdash_M^* \sigma q_f \wedge q_f \in F\} \quad (2.2)$$

Nótese que (2.2) es igualito a (1.3).

Ejemplo NFA Palabras sobre $\{a, b, c\}$ comiencen en una secuencia de a 's y b 's que terminen en abc (que es lo mismo que la expresión regular $(a|b)^* abc$):

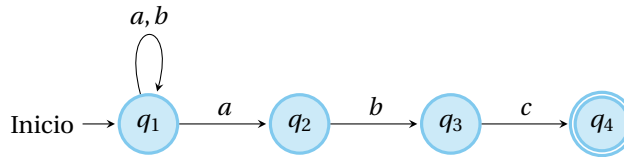


Figura 1: El NFA tiene la opción de elegir ir al estado q_1 o al q_2 consumiendo a cuando se encuentra en q_1 . Esta capacidad del NFA de poder “elegir” o “adivinar” siempre el camino correcto se le llama no-determinismo.

En contraste con el NFA de la Figura 1, un DFA para la expresión regular $(a|b)^* abc$ sería:

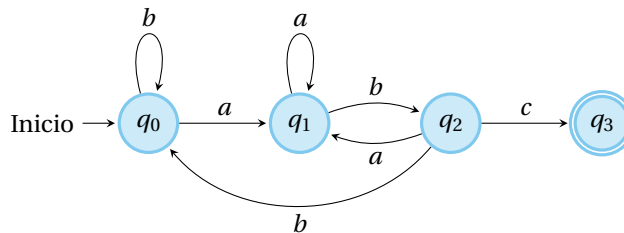


Figura 2: DFA de la expresión regular $(a|b)^* abc$.

Como podemos observar, la construcción de un DFA es más complicada que la de un NFA, dado que el no-determinismo nos permite hacer cosas que el DFA no permite, como las transiciones con ϵ por dar un ejemplo.

2.1. Relaciones entre los lenguajes

DFA es caso particular de NFA:

- $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$ para todo $q \in Q$
- $|\delta(q, x)| = 1$ para todo $q \in Q, x \in \Sigma$
- Por lo tanto, aceptado por DFA \subseteq aceptado por NFA

R.E. \rightarrow NFA:

- Dada una R.E. sobre Σ , construimos un NFA que acepta el lenguaje que denota.

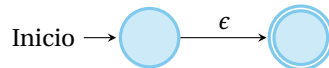
Teorema 2.1. Sea R una expresión regular sobre Σ . Construimos un NFA que acepte $\mathcal{L}(R)$.

Demostración. De la definición de expresiones regulares (R.E.) podemos decir lo siguiente:

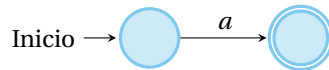
- Equivalencia entre R.E. y NFA de lenguaje vacío \emptyset :



- Equivalencia entre R.E. y NFA de palabra vacía ϵ :



- Equivalencia entre R.E. y NFA de un símbolo a , tal que $a \in \Sigma$:



Notar que todos los NFA contruidos tienen un estado final, y una vez que se “entra” no hay forma de volver atrás; y una vez “sale” (llega al final) no hay manera de devolverse.

Ahora supongamos que tenemos dos expresiones regulares R y S tal que estas tienen sus respectivos NFA's indicados a continuación:

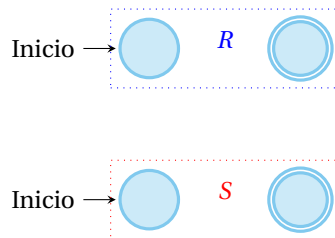
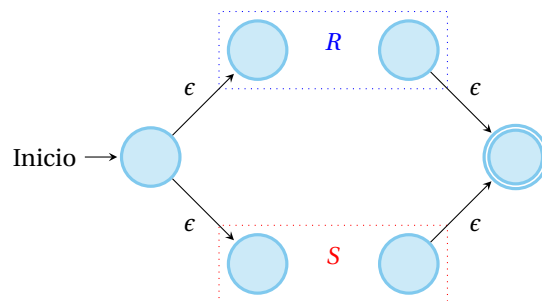


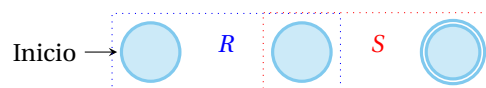
Figura 3: Los rectángulos que encierran los estados con líneas punteadas representan el NFA de la expresión regular correspondiente.

Luego, podemos decir:

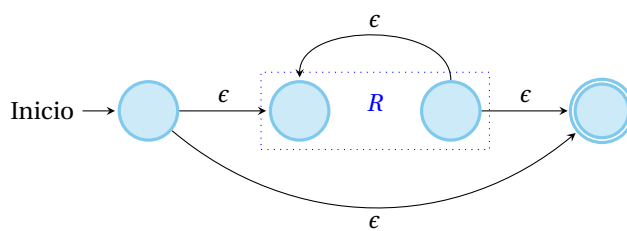
- Operación OR entre dos expresiones regulares: $(R) \mid (S)$:



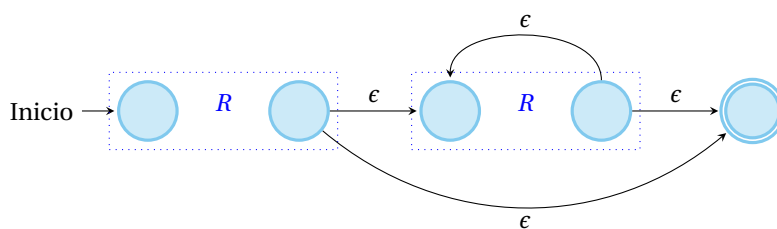
- Concatenación entre dos expresiones regulares: $(R) \cdot (S)$:



- Estrella Kleene de una expresión regular: $(R)^*$:



- Kleene Plus de una expresión regular: $(R)^+ = (R) \cdot (R)^*$:



□