

INF155: Informática Teórica

Clase 5 y 6: De NFA a DFA

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 22 de Marzo de 2016

1. NFA \rightarrow DFA

Hasta el momento llevamos:

R.E. \longrightarrow NFA

DFA

Idea Los estados del DFA registran el conjunto de estados en que puede estar el NFA.

Problemas del NFA:

- Transiciones ϵ .

$\rightarrow \epsilon - \text{closure}(A) = \text{conjunto de estados que pueden alcanzarse mediante transiciones } \epsilon$.

Para calcularlo:

- $\mathcal{A} \subseteq \epsilon - \text{closure}(\mathcal{A})$
- Si $q \in \epsilon - \text{closure}(\mathcal{A})$, y $p \in \delta(q, \epsilon)$, entonces $p \in \epsilon - \text{closure}(\mathcal{A})$. La idea es repetir los anteriores hasta que no hayan cambios.
- El conjunto 2^Q es gigante \Rightarrow construiremos sólo los conjuntos alcanzables desde el estado inicial.

1.0.1. Algoritmo

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Definimos el DFA $M' = (2^Q, \Sigma, \delta', q'_0, F')$ mediante lo siguiente:

- $q'_0 = \epsilon - \text{closure}(\{q_0\})$
- $F' = \{\mathcal{A} \subseteq Q : \mathcal{A} \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(\mathcal{A}, x) = \bigcup_{q \in \mathcal{A}} \epsilon - \text{closure}(\delta(q, x))$; para todo $\mathcal{A} \subseteq Q, x \in \Sigma$

Entonces $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$

Ejemplo 1.1 (Convertir NFA a DFA). Consideremos palabras sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$ descritos por:

$$(a|b)^* abc$$

Aplicando las reglas de conversión que vimos la clase pasada, el NFA resultante está dado por la Figura 1.

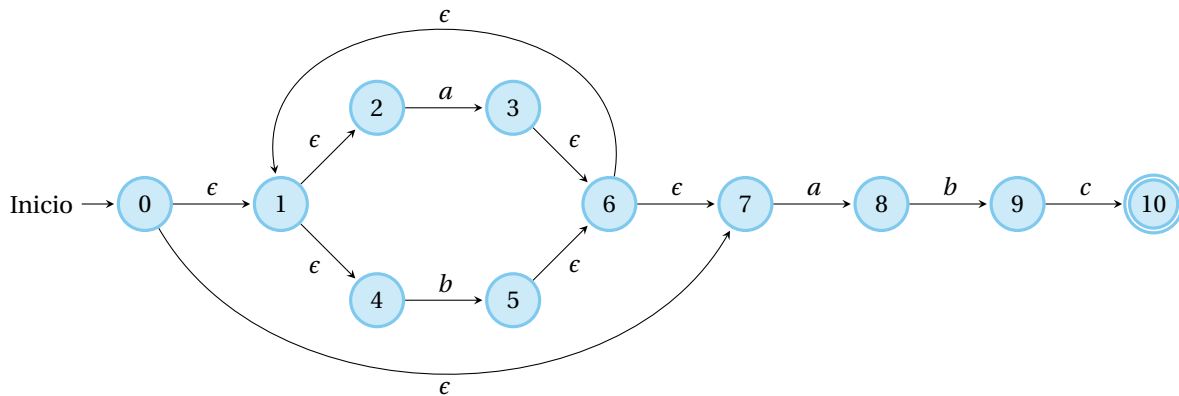


Figura 1: NFA de la expresión regular $(a|b)^* abc$ tras aplicar el método de Thompson.

Comenzamos contruyendo una tabla de la forma:

	Conjunto	a	b	c	Tipo

Cuadro 1: Tabla inicial de conversión NFA a DFA. La completaremos con el tiempo.

Comenzamos aplicando la operación ϵ -closure() al estado inicial. Sólo para este estado lo haremos paso por paso:

- De estado 0 podemos ir a los estados 0, 1 y 7. Por lo tanto, hasta el momento ϵ -closure({0}) viene dado por:

$$\epsilon\text{-closure}(\{0\}) = \{0, 1, 7, \dots \quad (1.1)$$

Nótese que el estado 0 también va como resultado de la operación ϵ -closure(). Esto se debe a que podemos acceder a través del mismo consumiendo ϵ a través de un loop, algo totalmente válido para un NFA.

Antes de continuar, le agregamos una marca al estado 0 para recordarnos que ya encontramos los estados a los cuáles podemos acceder a través de él consumiendo ϵ :

$$\epsilon\text{-closure}(\{0\}) = \{\overset{\checkmark}{0}, 1, 7, \dots \quad (1.2)$$

- Recuerde que ϵ -closure() es una operación recursiva, por lo tanto tendremos que ver a qué estados podemos acceder consumiendo ϵ de los que obtuvimos con 0.

Continuamos con el estado 1, y a través de él consumiendo ϵ podemos acceder a los estados 2 y 4. Los agregamos al conjunto de salida de (1.2):

$$\epsilon\text{-closure}(\{0\}) = \{\overset{\checkmark}{0}, 1, 7, 2, 4, \dots$$

Luego, le colocamos una marca al estado 1 para recordarnos que ya vimos a qué estados podemos ir consumiendo ϵ :

$$\epsilon\text{-closure}(\{0\}) = \{\overset{\checkmark}{0}, \overset{\checkmark}{1}, 7, 2, 4, \dots \quad (1.3)$$

- Continuamos con el estado 7. A través del estado 7 consumiendo ϵ sólo podemos ir al mismo 7. Por lo tanto, no agregamos nada al conjunto de salida de (1.3) y colocamos una marca en el estado 7:

$$\epsilon\text{-closure}(\{0\}) = \{\overset{\checkmark}{0}, \overset{\checkmark}{1}, \overset{\checkmark}{7}, 2, 4, \dots \quad (1.4)$$

- Continuamos con el estado 2. Ocurre lo mismo que con 7, consumiendo ϵ sólo podemos ir a 2. Por lo tanto el conjunto de salida (1.4) queda intacto. Antes de pasar al siguiente le colocamos una marca al estado 2:

$$\epsilon - \text{closure}(\{0\}) = \{\overset{\checkmark}{0}, \overset{\checkmark}{1}, \overset{\checkmark}{7}, \overset{\checkmark}{2}, 4, \dots\} \quad (1.5)$$

- Seguimos con el estado 4. De la misma forma que los estados 2 y 7, sólo podemos acceder al estado 4 consumiendo ϵ . En consecuencia, el conjunto de salida de (1.5) queda intacto. En este momento, agregamos una marca a dicho estado:

$$\epsilon - \text{closure}(\{0\}) = \{\overset{\checkmark}{0}, \overset{\checkmark}{1}, \overset{\checkmark}{7}, \overset{\checkmark}{2}, \overset{\checkmark}{4}, \dots\} \quad (1.6)$$

- Ahora que tenemos con una marca todos los estados del conjunto de salida de $\epsilon - \text{closure}()$, vemos que el resultado de $\epsilon - \text{closure}(\{0\})$ es el mismo (1.6). Los reordenamos para mantener el orden:

$$\epsilon - \text{closure}(\{0\}) = \{0, 1, 2, 4, 7\} \quad (1.7)$$

El resultado de (1.7) no se encuentra en nuestra tabla, así que lo agregamos y le damos un nombre... A :

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$				

Luego, para cada estado de A vemos a cuáles podemos acceder consumiendo a , b y c . A los resultados arrojados le aplicamos $\epsilon - \text{closure}()$.

Convención Usaremos la notación $q \rightarrow \sigma$, con $q \in 2^Q$ y $\sigma \in \Sigma$ para mostrar a qué estados podemos ir desde q consumiendo σ (el resultado es un conjunto):

Comenzamos con $A \rightarrow a$ (¿a qué estados podemos ir desde el conjunto de estados A consumiendo a). Recordemos que $A = \{0, 1, 2, 4, 7\}$, entonces:

- De los estados: 0, 1, 4 no vamos a ninguna parte consumiendo a .
- Del estado 2 vamos al estado 3 consumiendo a . Agregamos este estado al conjunto de salida de $A \rightarrow a$:

$$A \rightarrow a = \{3, \dots\}$$

- Del estado 7 vamos al estado 8 consumiendo a . Agregamos este estado al conjunto de salida de $A \rightarrow a$:

$$A \rightarrow a = \{3, 8, \dots\}$$

- Como ya vimos todos los estados de A a los cuales podemos ir consumiendo a , vemos que:

$$A \rightarrow a = \{3, 8\} \quad (1.8)$$

Inmediatamente, aplicamos la operación $\epsilon - \text{closure}()$ a (1.8):

$$\epsilon - \text{closure}(\{3, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} \quad (1.9)$$

El conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ no se encuentra en la tabla, por ende se agrega y se bautiza:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B			
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$				

Continuamos donde quedamos:

$$A \rightarrow b = \{5\}$$

$$\epsilon - \text{closure}(\{5\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \quad (1.10)$$

El resultado (1.10) no se encuentra en la tabla, así que lo agregamos y le damos un nombre:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C		
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$				
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$				

De inmediato, seguimos con $A \rightarrow c$:

$$A \rightarrow c = \emptyset$$

$$\epsilon - \text{closure}(\emptyset) = \emptyset$$

El conjunto vacío no está en nuestra tabla, así que lo agregamos:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C	D	
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$				
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$				
D	\emptyset				

Rápidamente, vemos que del conjunto vacío sin importar lo que consumamos no llegaremos a ningún estado, es decir, uno vacío. Entonces:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C	D	
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$				
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$				
D	\emptyset	D	D	D	

Realizamos el mismo procedimiento para B :

$$B \rightarrow a = \{3, 8\}$$

Ya hemos aplicado previamente $\epsilon - \text{closure}()$ a $\{3, 8\}$ (ecuación (1.9)). Por lo tanto, es obvio que del conjunto B consumiendo a llegamos al mismo B :

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C	D	
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$	B			
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$				
D	\emptyset	D	D	D	

Continuamos:

$$B \rightarrow b = \{5, 9\}$$

$$\epsilon - \text{closure}(\{5, 9\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$ no está en la tabla. Así que lo agregamos con nombre incluido:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C	D	
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$	B	E		
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$				
D	\emptyset	D	D	D	
E	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$				

Retomamos:

$$B \rightarrow c = \emptyset$$

Ya hemos obtenido el conjunto vacío antes, por lo tanto:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C	D	
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$	B	E	D	
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$				
D	\emptyset	D	D	D	
E	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$				

Pasamos al conjunto de estados C y hacemos lo de siempre:

$$C \rightarrow a = \{3, 8\} \rightsquigarrow B$$

$$C \rightarrow b = \{5\} \rightsquigarrow C$$

$$C \rightarrow c = \emptyset \rightsquigarrow D$$

Agregamos la información anterior a la tabla:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C	D	
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$	B	E	D	
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$	B	C	D	
D	\emptyset	D	D	D	
E	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$				

Continuamos el supuesto último conjunto de datos E :

$$E \rightarrow a = \{3, 8\} \rightsquigarrow B$$

$$E \rightarrow b = \{5\} \rightsquigarrow C$$

$$E \rightarrow c = \{10\}$$

$$\epsilon - \text{closure}(\{10\}) = \{10\}$$

El conjunto arrojado por $\epsilon - \text{closure}(\{10\})$ no está en la tabla, así que lo agregamos con un nombre único:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C	D	
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$	B	E	D	
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$	B	C	D	
D	\emptyset	D	D	D	
E	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$	B	C	F	
F	$\{10\}$				

Nuevamente, para cada estado en F vemos hacia dónde vamos consumiendo a , b y c :

$$F \rightarrow a = \emptyset \rightsquigarrow D$$

$$F \rightarrow b = \emptyset \rightsquigarrow D$$

$$F \rightarrow c = \emptyset \rightsquigarrow D$$

No tenemos más estados nuevos, así que vamos definiendo el “Tipo” de cada uno de los conjuntos anteriores:

- El **estado inicial** está dado por ϵ -closure($\{0\}$), que en este caso es A .
- Por otro lado, todos aquellos que contengan al estado final de nuestro NFA inicial (Figura 1), serán **estados finales** del DFA resultante. Sólo el estado F contiene a 10 , por lo tanto es final.

Finalmente, se tiene que la tabla de transición de estados δ del DFA resultante es:

	Conjunto	a	b	c	Tipo
A	$\{0, 1, 2, 4, 7\}$	B	C	D	Inicial
B	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$	B	E	D	
C	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$	B	C	D	
D	\emptyset	D	D	D	
E	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$	B	C	F	Final
F	$\{10\}$	D	D	D	

Cuadro 2: Tabla de transición del DFA resultante

A través de la tabla de transición definida en el Cuadro 2, vemos que el DFA es:

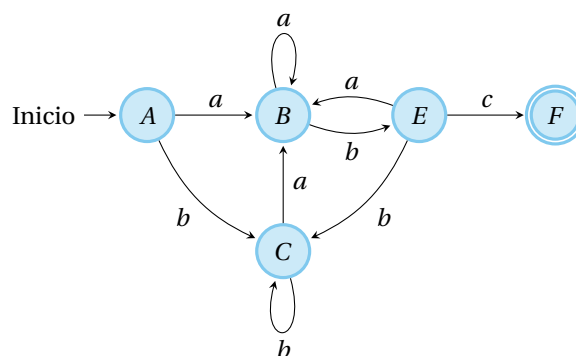


Figura 2: Un DFA para la expresión regular $(a|b)^* abc$

El DFA de la Figura 2 es sólo un **candidato**. Existen otros NFA que representan la misma expresión regular, como el que muestra la Figura 3.

Con ello, completamos el paso NFA \rightarrow DFA (Figura 4).

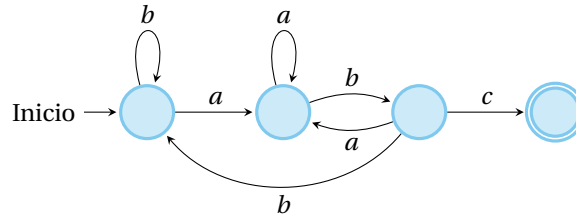


Figura 3: Omitiendo el estado muerto del DFA de la Figura 2.

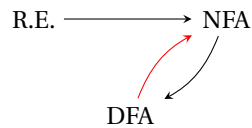


Figura 4: La flecha roja representa que DFA es un caso particular de NFA.

2. DFA a RE

Este truco se usa en variados algoritmos que procesan grafos.

Idea Dado $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, numeramos (¡arbitrariamente!) los estados $Q = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

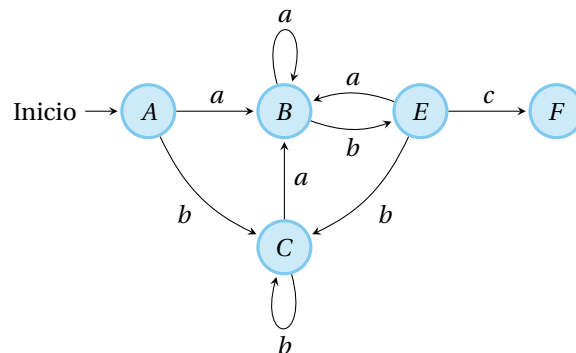
Definimos:

- $R_{ij}^{(k)}$: Expresión regular denota las palabras que llevan a M del estado i al estado j , pasando sólo por estados $\{1, 2, \dots, k\}$ entremedio.

Los $R_{ij}^{(n)}$ son las palabras que llevan a M del estado i al j sin restricciones.

- $R_{q_0, q_f}^{(n)}$: llevan a M del estado inicial q_0 al final $q_f \rightarrow$ | de todos estos denota el lenguaje que M acepta.

Demostración (inducción). Para un ejemplo de la demostración, considere el DFA:



Base $R_{ij}^{(0)}$: Ir de i a j directamente. En el ejemplo:

$$R_{AB}^{(0)} = a, \quad R_{AE}^{(0)} = \emptyset, \quad R_{EE}^{(0)} = \epsilon, \quad R_{BB}^{(0)} = \epsilon \mid a \quad \dots$$

Inducción Dados los $R_{ij}^{(k)}$, calculamos $R_{ij}^{(k+1)}$. Opciones:

- De i a j ($R_{ij}^{(k)}$) pasando sólo por $\{1, \dots, k\}$.
- De i a j , pasando al menos una vez por $k+1$ (Figura 5).

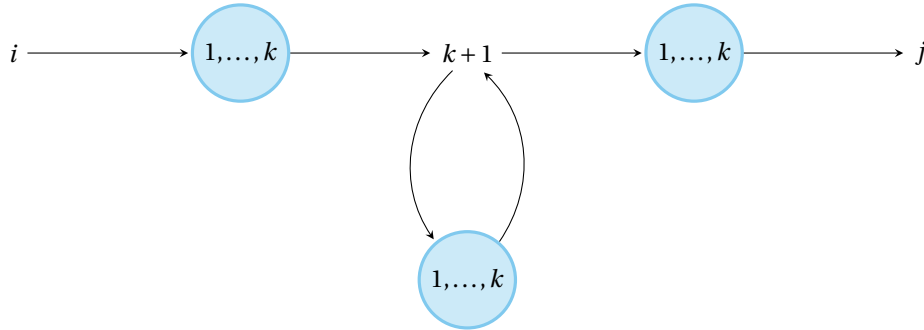


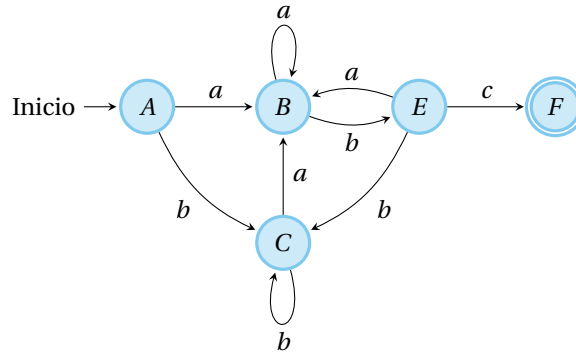
Figura 5: Los nodos encerrados en círculos representan el conjunto de estados $\{1, \dots, k\}$

Es decir:

$$R_{ij}^{(k+1)} = R_{ij}^{(k)} \mid R_{i,k+1}^{(k)} \left(R_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^* R_{k+1,j}^{(k)} \quad (2.1)$$

□

Otra Idea Sistema de ecuaciones:



Sea L_{ij} los lenguajes de palabras que llevan de i a j . Por ejemplo, ir de A a C :

$$\begin{aligned} L_{AA} &= \epsilon \\ L_{AC} &= bL_{CC} \\ L_{AB} &= aL_{BB} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Otra forma es cómo llegamos a un estado (recuerde partir del inicial):

$$\begin{aligned} L_A &= \epsilon && \text{(de A a A)} \\ L_B &= L_A a \mid L_B a \mid L_E a \mid L_C a \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para resolver algunas ecuaciones utilice:

$$X = A \cdot X \mid B \quad (2.2)$$

Que vimos hace algun tiempo. Recuerde que la respuesta de lo anterior es:

$$X = A^*B$$

Con ello, tenemos las herramientas necesarias para resolver las 25 ecuaciones. □

Completamos el ciclo:

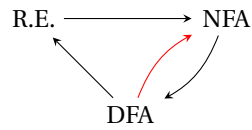


Figura 6: La flecha roja representa un caso particular de los DFA.