

INF155: Informática Teórica

Clase 28: Algunos Problemas NP-completos

Aldo Berrios Valenzuela

Jueves 23 de Junio de 2016

1. Algunos Problemas NP-completos

1.1. Independent Set (IS)

Definición 1.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un subconjunto I de los vértices es un *conjunto independiente* (independent set) si no hay arcos entre vértices en I . I es *maximal* si no hay conjunto independientes mayores en G .

Por ejemplo, considere el grafo de la Figura 1:

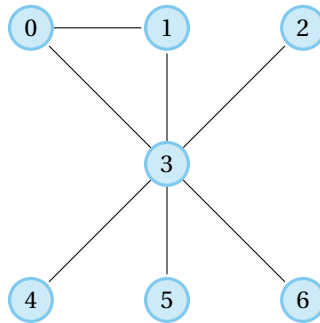


Figura 1: Grafo de avberrio

Entonces, de acuerdo a la definición 1.1, se tiene que el conjunto independiente es $I = \{0, 2, 4, 5, 6\}$, o bien, $I = \{1, 2, 4, 5, 6\}$. Las Figuras 2a y 2b muestran con más detalles (usando colores):

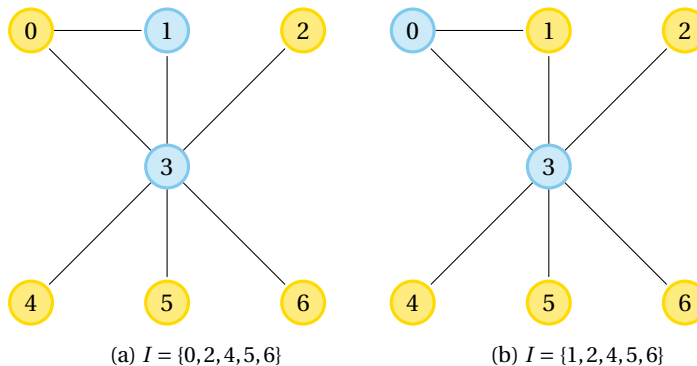


Figura 2: Los nodos amarillos corresponden a vértices que pertenecen a I .

Problema Dado $G = (V, E)$ y $k \leq |V|$, ¿tiene G un IS de tamaño $\leq k$?

Teorema 1.1. IS es NP-completo.

Demostración. Recordemos que, para poder demostrar que un problema es NP-completo, tenemos que demostrar dos cosas: que está en NP, y que es NP-duro.

Para el primer caso, sólo tenemos que elegir k vértices, y comprobar que no existen conexiones entre ellos. Hacer esto toma una complejidad polinomial de grado 2. En consecuencia, este problema está en NP ($P \subseteq NP$).

Para demostrar que el problema es NP-duro, hacemos la reducción en tiempo polinomial $3SAT \leq_p IS$. Consideremos el siguiente 3SAT como ejemplo:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_4 \vee x_1 \vee \bar{x}_2) \quad (1.1)$$

Idea: Literales x , y no son verdaderos a la vez: x conectado con y . Sólo un literal verdadero por cláusula $\leadsto k$ es el número de cláusulas.

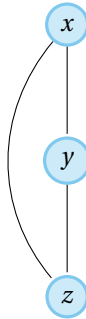


Figura 3: Para cada cláusula $(x \vee y \vee z)$ tenemos que hacer este tipo de construcción.

Para cada variable, conectar x y \bar{x} :



Figura 4: Conectamos cada variable x con su negación \bar{x}

Luego, aplicando los criterios anteriores sobre el ejemplo 3SAT de la ecuación (1.1), podemos formar el grafo de la Figura 5.

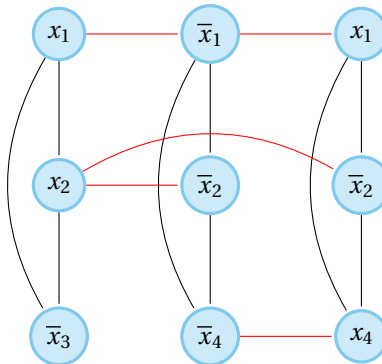


Figura 5: Construcción del 3SAT de la ecuación (1.1) usando los criterios mencionados previamente.

El grafo de la Figura 5 tiene un IS de tamaño 3 si y sólo si en la fórmula original podemos asignar el valor verdadero a un literal en cada cláusula, que si y sólo si la fórmula puede satisfacerse.

Finalmente, como IS es NP-duro y está en NP, se tiene que IS es NP-completo. \square

Importante La reducción debe hacerse en tiempo polinomial. Si no podemos construir IS a partir de 3SAT en tiempo polinomial, fallamos.

1.2. Node Cover

Un “covering” de $G = (V, E)$ considera todos los vértices/arcos. Un *edge covering* de G es un conjunto de arcos tal que todos los vértices de G están en un arco (Figura 6a). Un *node covering* es un conjunto de vértices que aparecen en todos los arcos (Figura 6b).

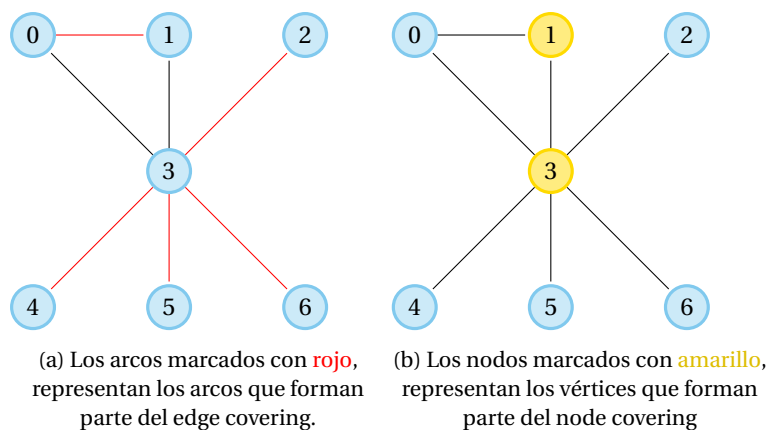


Figura 6: Nótese que tanto los arcos como los nodos que forman parte del edge covering y el node covering respectivamente, son sólo 1 ejemplo. En el grafo de la Figura 1 hay otros conjuntos.

Problema Node Cover (NC) Dado $G = (V, E)$ y $k \leq |V|$, ¿Hay un node cover de G de tamaño k ?

Teorema 1.2. NC es NP-completo.

Demostración. Como toda demostración de problema NP-completo, tenemos que demostrar que nuestro problema es NP y además, es NP-duro.

Como primer paso, demostrar que NC pertenece a NP, sólo basta con comprobar que todos los nodos cumplan con la definición de node covering (trivial). Esto nos dice que $NC \in P$.

El complemento de un conjunto independiente (IS) es un NC. O sea:

$$IS \leq_p NC \quad (1.2)$$

\square

1.3. ¿Por qué hacemos estas reducciones?

Lo que logramos hasta el momento es pasar de demostraciones con TM a otras más abstractas:



Figura 7: La gracia del problema SAT, es que nos permitió pasar de hacer demostraciones de problemas NP-completos con máquinas de Turing a demostraciones más abstractas.