

INF155: Informática Teórica

Ayudantía 4: El Lema de Bombeo

Viernes 22 de Abril de 2016

1. Lema de Bombeo para Lenguajes Regulares

Teorema Sea L un lenguaje regular, entonces hay $N \in \mathbb{N}$ regulares $\sigma \in L$ y $|\sigma| \geq N \Rightarrow \sigma = \alpha\beta\gamma$, $|\alpha\beta| \leq N$, $|\beta| \geq 1$, entonces se tiene que $\alpha\beta^*\gamma \in L$

Consideraciones:

- N depende de L . No se puede dar un valor fijo (por ejemplo $N = 3$)
- El lema se usa para probar que un lenguaje no es regular.
- “Converse” no es cierto: es decir, si un lenguaje cumple con el lema de bombeo, no necesariamente es regular.
- Condición necesaria, pero no suficiente.
- Lenguajes regulares no se pueden “contar”. Por ejemplo:

$$L = \{a^i b^i / i \geq 0\}$$

Ejemplo Sea $L = \{a^i b^i / i \geq 0\}$ no es regular.

Demostración

Supongamos que L es regular. Sea $N \in \mathbb{N}$ nuestra constante. Sea $\sigma = a^N b^N$, $|\sigma| = 2N \geq N$, $\sigma = \alpha\beta\gamma$, $|\alpha\beta| \leq N$, $|\beta| \geq 1$. Por lo tanto, se tiene que $\alpha\beta = a^k$, $k \leq N$. Para la palabra $\alpha\beta\gamma$, $|\alpha\beta^0\gamma| \leq k$ vemos que tendremos una cantidad menor de a 's que de b 's, entonces se tiene que $\alpha\beta^0\gamma \notin L$.

\therefore se tiene que L no es regular.

□

Ejemplo 2 Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$. Sea $L = \{w / w \text{ cumple } \#a + \#b = \#c\}$

Demostración

Supongamos que L es regular. Sea $N \in \mathbb{N}$ la constante del Lema y $\sigma = a^N b c^{N+1}$, $|\sigma| = N + 1 + N + 1 = 2(N + 1) \geq N$. Rompemos $\sigma = \alpha\beta\gamma$ tal que $|\alpha\beta| \leq N$. Como $|\alpha\beta| \leq N$, entonces $\alpha\beta = a^k$, $k \leq N$. Como $|\beta| \geq 1$, $\alpha\beta^0\gamma$ tendremos una a menos, y con ello, $\#a + \#b \neq \#c$. Por lo tanto, $\alpha\beta^0\gamma \notin L$, y por contradicción, L no es regular.

□

Ejemplo 3 Sea $L = \{a^p / p \text{ es primo}\}$. Demuestre que no es regular.

Demostración

Supongamos que L es regular, y sea $N \in \mathbb{N}$ la constante del lema.

Sea $\sigma = a^p$, con P primo tal que $p \geq N$. Rompemos $\sigma = \alpha\beta\gamma$, talque $|\alpha\beta| \leq N$, con $|\beta| \geq 1$.

Sea $k = |\alpha\gamma| > 1$, entonces:

$$|\alpha\beta^k\gamma| = |\alpha\gamma| + |\beta^k| = |\alpha\gamma| + k|\beta| = |\alpha\gamma| + |\alpha\gamma||\beta| = |\alpha\gamma| \underbrace{(1 + |\beta|)}_{\geq 2}$$

Nótese que el resultado anterior arroja un número compuesto. Por lo tanto $\alpha\beta^k\gamma \notin L$. Por contradicción se tiene que L no es regular.

□

Ejemplo 4 Demuestre que $L = \{a^n / n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración

Supongamos que L es regular, y sea $N \in \mathbb{N}$ la constante del lema.

Sea $\sigma = a^{N!}$, $|\sigma| = N! \geq N$. Rompemos $\sigma = \alpha\beta\gamma$, $|\beta| \geq 1$, $|\alpha\beta| \leq N$. Sea $k = (N+1)!$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\alpha\beta^{k+1}\gamma| &= |\alpha| + |\gamma| + |\beta^{k+1}| = |\alpha\gamma| + |\beta| + |\beta^k| \\ &= |\alpha\beta\gamma| + |\beta^k| = N! + k|\beta| = N! + (N+1)!|\beta| \\ &= N! + (N+1)N!|\beta| = \underbrace{N!(1 + (N+1)|\beta|)}_{\text{No es un Factorial}} \end{aligned}$$

Para $N!(1 + (N+1)|\beta|)$ sea un factorial, debe cumplirse que:

$$1 + (N+1)|\beta| = (N+1)$$

Lo cual es imposible. Por lo tanto $\alpha\beta^{k+1}\gamma \notin L$, entonces por contradicción se tiene que L no es regular.

□

2. Clausura

Sea L_R y L_S lenguajes regulares. Entonces:

- $L_R \cup L_S$ es regular.
- $L_R \cdot L_S$ es regular.
- L_R^* es regular.
- $L_R \cap L_S$ es regular.
- $\bar{L}_R = \Sigma^* - L_R$ es regular.
- Reverso es regular.
- Substitución es cerrada.
- Homomorfismos (inversos) son cerrados.

Definición Sea $\Sigma, \Delta, L_a \subseteq \Delta^*$. Sea L un lenguaje regular:

$$L_S = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \mid a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \in L, \alpha_1 \in L_{a_1}, \alpha_2 \in L_{a_2}, \dots, \alpha_n \in L_{a_n}\}$$

$$\Sigma = \{a\}, \Delta = \{0\}$$

$$L_a = \mathcal{L}(0^*)$$

Definición Un homomorfismo es $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ tal que $h(ab) = h(a) \cdot h(b)$ y $h(\epsilon) = \epsilon$

Definición Un homomorfismo inverso. Sea h un homomorfismo, entonces:

$$h^{-1}(\sigma) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid h(\alpha) = \sigma\}$$