

INF155: Informática Teórica

Clase 7: DFA mínimo

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 29 de Marzo de 2016

1. DFA Mínimo

Definición 1.1 (DFA mínimo). Corresponde un DFA con mínimo número de estados.

Teorema 1.1 (Myhill - Nerode). Si $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es un DFA y $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ es el DFA mínimo tal que:

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M'), \quad (1.1)$$

entonces los estados de Q' corresponden a una partición de Q (cada estado $q' \in Q'$ corresponde a un conjunto de estados de Q).

Decimos que en el DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ la palabra $\sigma \in \Sigma^*$ distingue entre $p, q \in Q$ si $\delta(p, \sigma) \in F \Leftrightarrow \delta(q, \sigma) \notin F$. Qué es lo mismo que:

$$(\delta(p, \sigma) \in F \wedge \delta(q, \sigma) \notin F) \vee (\delta(p, \sigma) \notin F \wedge \delta(q, \sigma) \in F)$$

Cuidado Distinguir entre p y q no nos dice el camino tomado por el DFA hasta llegar a q .

Idea General Queremos construir una partición de Q tal que estados en el mismo grupo no se distinguen. Esto partiendo con un grupo, e ir viendo si alguno de los grupos debe dividirse si con un símbolo hay estados que llevan a grupos diferentes.

1.0.1. Algoritmo para encontrar el DFA mínimo

1. Tome Q y divídalo en dos conjuntos (grupos): estados finales y estados no finales.
2. Realice una tabla de transición de estados. El resultado de salida será el conjunto de estados al que se accede consumiendo $\sigma \in \Sigma$ en lugar el estado $q \in Q$.
3. Compare las filas de cada grupo en la tabla. Si en un grupo existen filas diferentes, divídalo en tantos grupos sea posible como filas diferentes existan. y vuelva al paso 2.

Nota: Agrupe las filas por grupo de los subconjuntos resultantes.

4. Si para cada grupo existente, las filas que lo componen son iguales, encontró el DFA mínimo.

Ejemplo 1.1. Consideremos como ejemplo el DFA de la Figura 1.

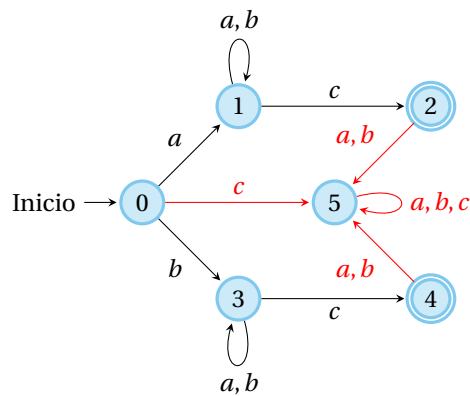


Figura 1: DFA de ejemplo. Le llamaremos M .

Creamos una tabla de transición inicial:

	a	b	c	Tipo
0	1	3	5	Inicial
1	1	1	1	
2	5	5	5	Final
3	3	3	4	
4	5	5	5	Final
5	5	5	5	

Cuadro 1: Tabla de transición de estados de M .

Creamos dos grupos, subconjunto tendrá los estados no finales y el otro los finales:

$$A = \{0, 1, 3, 5\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

Luego, agrupamos las filas del Cuadro 1 según el grupo en el que se encuentren:

	a	b	c
A	0	A	A
	1	A	B
	3	A	B
	5	A	A
B	2	A	A
	4	A	A

De la tabla anterior, vemos que las filas que tienen el estado 1 y 3 (combinación AAB) son diferentes de las 0 y 5 (combinación AAA). Por lo tanto, las dividimos en dos grupos donde:

$$A = \{0, 5\}$$

$$B = \{1, 3\}$$

$$C = \{2, 4\}$$

Luego, la tabla de transición de la segunda división es:

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>A</i>	0	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
	5	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	1	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
	3	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>C</i>	2	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
	4	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>

Como puede ver en el grupo *A* de la tabla anterior, sus filas difieren, en consecuencia, creamos nuevos grupos dados por:

$$A = \{0\}$$

$$B = \{5\}$$

$$C = \{1, 3\}$$

$$D = \{2, 4\}$$

Luego, la tabla de transición de estados para la tercera división es:

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>A</i>	0	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	5	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	1	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
	3	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>D</i>	2	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
	4	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>

Como ya no tenemos filas diferentes dentro de un mismo grupo, marcamos los estados no finales y finales bajo el mismo criterio de siempre. La Figura 2 muestra con dibujitos el DFA mínimo que resulta del Cuadro 2.

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Tipo
<i>A</i>	0	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	Inicial
<i>B</i>	5	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	
<i>C</i>	1	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
	3	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
<i>D</i>	2	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	Final
	4	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	

Cuadro 2: Tabla de transición del DFA mínimo.

Ejemplo 1.2. Queremos encontrar el DFA mínimo $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dado por la Figura 3. Para ello, comenzamos creando los dos conjuntos: los que no son finales y los que sí son finales:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$B = \{5\}$$

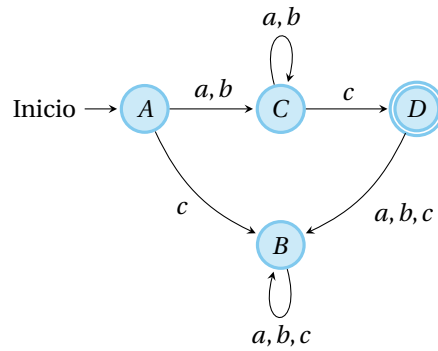
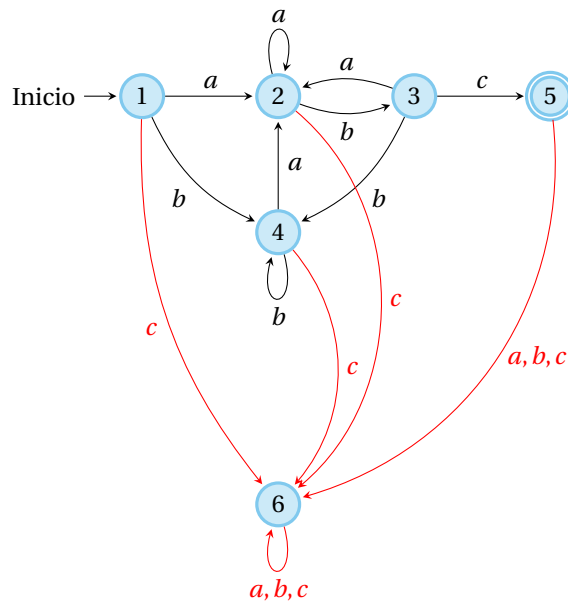
Figura 2: DFA mínimo de M .

Figura 3: DFA candidato visto en la clase pasada. Nótese que le agregamos un estado muerto

Luego, la tabla de transición para la primera división es:

		a	b	c
	1	A	A	A
	2	A	A	A
A	3	A	A	B
	4	A	A	A
	6	A	A	A
B	5			

Cuadro 3: No hay posibilidad de división del grupo B , así que dejaremos su fila en blanco por el momento. Haremos lo mismo con los grupos posteriores.

En el Cuadro 3, la única fila que difiere de las demás en el conjunto A es el estado 3. En consecuencia, separamos

los nuevos grupos son:

$$A = \{1, 2, 4, 6\}$$

$$B = \{3\}$$

$$C = \{5\}$$

La tabla de transición de la segunda división es:

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>A</i>	1	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
	2	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
	4	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
	6	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	3			
<i>C</i>	5			

Tercera división:

$$A = \{1, 4, 6\}$$

$$B = \{2\}$$

$$C = \{3\}$$

$$D = \{5\}$$

Tabla de transición de la tercera división:

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>A</i>	1	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
	4	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
	6	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	2			
<i>C</i>	3			
<i>D</i>	5			

Cuarta división:

$$A = \{1, 4\}$$

$$B = \{6\}$$

$$C = \{2\}$$

$$D = \{3\}$$

$$E = \{5\}$$

Tabla de transición de la cuarta división:

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Tipo
<i>A</i>	1	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>E</i>	Inicial
	4	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>E</i>	
<i>B</i>	6	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>E</i>	
<i>C</i>	2	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>D</i>	
<i>D</i>	3	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	Final
<i>E</i>	5	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	Muerto

No hay filas que difieran dentro de un mismo conjunto de estados. Por lo tanto, el DFA mínimo de M es:

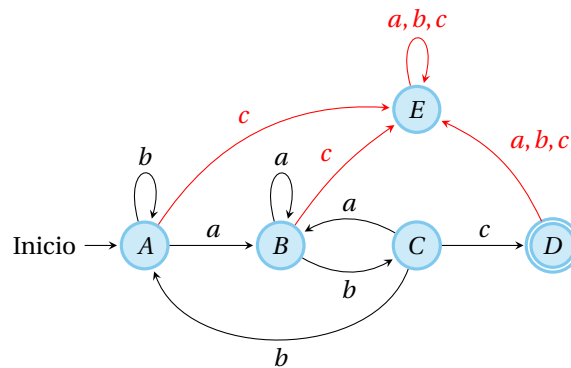


Figura 4: DFA mínimo de M , correspondiente a la expresión regular $(a|b)^* abc$