

INF155: Informática Teórica

Ayudantía 10: Problemas Intratables II

Aldo Berrios Valenzuela

6 de julio de 2016

1. Ayudantía 10: NP-Completo

Un problema \hat{P}_C NP-completo si y sólo si:

- $\hat{P} \in \text{NP}$
- $\hat{P} \in \text{NP-hard}$. $\forall x \in \text{NP}, x \sim \hat{P}$. (x es un problema)

Para demostrar que es NP:

- Resolución en tiempo polinomial por una NTM. /* Se recomienda usar esta */
- Verificación de solución en tiempo polinomial por TM. /* es mucho más complicado usar esto para demostrar que está en NP */

Entre los que más preguntan son los siguientes:

- 3-SAT
- Independent set
- Vertex Cover
- Clique

Definición 1.1 (SAT). Dada una expresión booleana. ¿Es satisfacible?

- Asignación de verdad (true): instanciación de variables.
- El valor de la expresión en el valor obtenido dada una asignación de verdad.
- Expresión satisfacible: Si hay una asignación de verdad que de valor “true”.

/* Es una combinación de asignación de valores tal que el resultado sea “true” */

Definición 1.2 (3-SAT). Problema SAT pero en 3-CNF.

- CNF: expresiones booleanas son con “ \wedge ” y cada cláusula tiene “ \vee ”
- Ejemplo de CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \dots) \wedge (\dots \vee \dots \vee \dots) \wedge (\dots \vee \dots) \quad (1.1)$$

- 3-CNF: Indica que cada cláusula tiene 3 variables.

Definición 1.3 (Independent-Set). Dado un grafo $G = (V, E)$ ¿Hay un conjunto de k vértices tales que los arcos que “participan”, incluyen sólo un vértice del conjunto. O sea, $S \subseteq V, \forall a, b \in S, E(a) \cap E(b) = \emptyset$.

Definición 1.4 (Vertex Cover). Sea $G = (V, E)$. ¿Hay un conjunto de k vértices tal que cada arco es incidente (adyacente) a al menos un vértice de S ? En otras palabras $S \subseteq V, \forall e \in E, \exists v \in S, v$ adyacente a e .

Definición 1.5 (Clique). Dado grafo $G = (V, E)$, un clique de G es un subgrafo K_t , de tamaño t tal que $K_t \subseteq G$. ¿Tiene un clique de tamaño t ?

1.1. Ejemplos

Ejemplo 1.1. Se sabe que I.S. es NP-completo. Demostrar que vertex cover también lo es.

Demostración. Comenzamos demostrando que vertex cover es NP:

- Construimos S tal que $|S| = k$.
- Si tomo arco $e \in E$, verificar si es adyacente a al menos un vértice de S , toma tiempo $O(|S|) \leq O(|V|)$. Para todos los arcos, $O(|V| \cdot |E|)$, lo cual es polinomial. */* La verificación debe ser en tiempo polinomial determinista, pero resolver el problema debe ser en polinomial indeterminista */*

Ahora demostramos que es NP-hard. Supongamos que $S, |S| = k$, es el máximo indepnt set de G .

$$G = V - S, \quad |C| = |V| - |S| = |V| - k \quad (1.2)$$

Si tomo $e \in E$, dos casos:

- Si e es adyacente a $v \in S$.
- e no está en S .

□

Ejemplo 1.2. Usando algún problema NP-completo demostrar que un SUBGRAPH ISOMORPHISM (SI) es NP-completo. Se define SI como un grafo G , ¿Existe un subgrafo en G isomorfo a G' ? Ejemplo de grafo isomorfo:

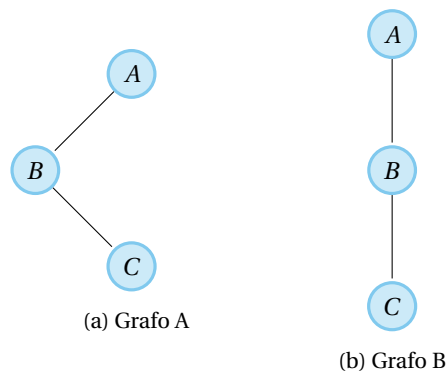


Figura 1: El grafo de (a) y (b) son el mismo grafo, por ende, son isomorfos.

/ Isomorfo siempre es el mismo significado */*

Demostración. S.I. es NP-completo. Buscar un **clique** de tamaño t es lo mismo que buscar un grafo isomorfo a K_t . Clique tamaño $t \Leftrightarrow K_t$ en G (S.I.). □