

INF155: Informática Teórica

Clase 9: Propiedades de Clausura

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 5 de Abril de 2016

1. Propiedades de Clausura

Teorema 1.1. Si L_1, L_2 son regulares, son regulares $L_1 \cup L_2, L_1 \cdot L_2, L_1^*, L_1^+$.

Demostración. Todas las operaciones anteriores se pueden demostrar a través de expresiones regulares. □

Teorema 1.2. Si L_1 y L_2 son regulares, entonces $L_1 \cap L_2$ es regular.

Demostración I. Consideremos DFA's $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ y $L_1 = \mathcal{L}(M_1), L_2 = \mathcal{L}(M_2)$. La intersección entre ambos DFA's no es más que

$$M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), F_1 \times F_2),$$

con $\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$ para todo $p \in Q_1, q \in Q_2, a \in \Sigma$. Entonces $L_1 \cap L_2 = \mathcal{L}(M)$. □

Demostración II. Usando el teorema 1.1 y el teorema 1.3: Si L_1 y L_2 son regulares, son regulares \bar{L}_1 y \bar{L}_2 , y:

$$\overline{(\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2)} = L_1 \cap L_2$$

Por lo tanto, los lenguajes regulares son cerrados respecto a la intersección. □

Teorema 1.3. Si L es regular, entonces \bar{L} es regular.

Demostración. Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, con $L = \mathcal{L}(M)$. Entonces el DFA $\bar{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$ □

Observación: La demostración del teorema 1.3 no se puede hacer con NFA, porque existirán palabras que un NFA acepte, pero su complemento no necesariamente aceptará lo que el NFA no acepta, dado que no está determinado el camino que sigue.

Teorema 1.4. Los lenguajes regulares son cerrados respecto a la diferencia de conjuntos (por ejemplo, $A \setminus B$)

Demostración (vía propiedades). Es sabido que:

$$L_1 \setminus L_2 = \overline{(L_1 \cap L_2)} \cap L_1$$

Los lenguajes regulares son cerrados respecto a su complemento e intersección. Por lo tanto $L_1 \setminus L_2$ es regular. □

Demostración vía autómatas. Sean $L_1 = \mathcal{L}(M_1)$ y $L_2 = \mathcal{L}(M_2)$ tales que

$$M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$$

$$M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$$

Dado lo anterior, podemos construir un DFA

$$M' = (Q_1, \Sigma, \delta, q_0, F_1 \setminus F_2)$$

con

$$\hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F_1 \setminus F_2 \quad ; \sigma \in \Sigma^*$$

Pero $\mathcal{L}(M') = L_1 \setminus L_2$. Por lo tanto, $L_1 \setminus L_2$ es regular. \square

Teorema 1.5. Los lenguajes regulares son cerrados respecto a la diferencia simétrica (por ejemplo, $A \triangle B$)

Demostración vía propiedades. Por definición:

$$L_1 \triangle L_2 = (L_1 \cup L_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$$

Los lenguajes regulares son cerrados respecto a la unión, intersección y diferencia de conjuntos. Por lo tanto $L_1 \triangle L_2$ es regular. \square

Demostración vía autómatas. Sean $L_1 = \mathcal{L}(M_1)$ y $L_2 = \mathcal{L}(M_2)$ tales que

$$M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$$

$$M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$$

Dado lo anterior, podemos construir un DFA

$$M' = (Q_1, \Sigma, \delta, q_0, F_1 \triangle F_2)$$

con

$$\hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F_1 \triangle F_2 \quad ; \sigma \in \Sigma^*$$

Pero $\mathcal{L}(M') = L_1 \triangle L_2$. Por lo tanto, $L_1 \triangle L_2$ es regular. \square

Definición 1.1 (Substitución). Sea L un lenguaje sobre Σ y sean L_a lenguajes sobre Δ , para todo $a \in \Sigma$. La substitución σ dada por L_a se define:

$$a_1 a_2 \dots a_n \mapsto L_{a_1} L_{a_2} \dots L_{a_n}$$

Esto puede extenderse a lenguajes en forma natural:

$$\sigma(L) = \bigcup_{\alpha \in L} \sigma(\alpha)$$

Observación: La substitución reemplaza cada símbolo de Σ por un lenguaje sobre Δ . Nótese que este lenguaje sobre Δ puede ser regular o no regular. No hay restricciones.

Teorema 1.6. Los lenguajes regulares son cerrados respecto a la substitución.

Demostración. Sean L, L_a regulares para $a \in \Sigma$. Supongamos R.E.s R y R_a tales que:

$$L = \mathcal{L}(R)$$

$$L_a = \mathcal{L}(R_a)$$

para todo $a \in \Sigma$. Substituyendo R_a para a en R , obtenemos una R.E. para $\sigma(L)$. \square

Definición 1.2 (Homomorfismo). Un *homomorfismo* de Σ^* a Δ^* es una función $h : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ tal que $h(\alpha\beta) = h(\alpha)h(\beta)$ para todo $\alpha, \beta \in \Sigma^*$

Observaciones de un homomorfismo:

- Es claro que $h(\epsilon) = \epsilon$, y por $h(a_1 a_2 \dots a_n) = h(a_1)h(a_2) \dots h(a_n)$ y basta definir h para $a \in \Sigma$.
- Un *homomorfismo* preserva una operación. Para lo que estamos viendo preserva la operación de *concatenación*.
- Un *homomorfismo* transforma cada símbolo de Σ por una palabra sobre Δ^*

Teorema 1.7. Los lenguajes regulares son cerrados respecto al *homomorfismo*.

Demostración. Un homomorfismo es una substitución de un lenguaje de una palabra. □

Teorema 1.8. Los lenguajes regulares son cerrados respecto de *homomorfismo inverso*.

Demostración. Sea $L \subseteq \Delta^*$ un lenguaje regular, $h : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ un homomorfismo. Sea $M = (Q, \Delta, \delta, q_0, F)$ un DFA tal que $L = \mathcal{L}(M)$. El DFA $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ con $\delta'(q, a) = \delta(q, h(a))$ para todo $q \in Q, a \in \Sigma$ acepta $h^{-1}(L)$. □