

INF155: Informática Teórica

Clase 2: Expresiones Regulares

Aldo Berrios Valenzuela

Jueves 10 de Marzo de 2016

1. Expresiones Regulares

Idea Aprovecho de las operaciones entre lenguajes...

Definición 1.1. Sea Σ un alfabeto. Definimos expresiones regulares (R.E.) y los lenguajes que denotan mediante los siguientes:

- i. \emptyset denota \emptyset
- ii. ϵ denota $\{\epsilon\}$
- iii. Para $a \in \Sigma$, a denota $\{a\}$.

Sean R, S expresiones regulares que denotan L_R y L_S .

- iv. $(R) \cdot (S)$ denota $L_R \cdot L_S$.
- v. $(R) \mid (S)$ denota $L_R \cup L_S$.
- vi. $(R)^*$ denota L_R^* (son cero mas cosas que se pueden obtener de R).

Extraoficialmente:

- $(R)^n$ con $n \in \mathbb{N}_0$ denota L_R^n .
- $(R)^+$ denota $L_R^+ = L_R \cdot L_R^*$.

Nota En el fondo las R.E. son reglas de construcción de lenguajes

Notación Evitar $()$, dejarlos sólo “cuando necesario”.

- Consideramos $()^n, ()^*, ()^+$ como “potencias”, es lo que primero se hace.
- Consideramos \cdot como “producto”, segunda precedencia. Comúnmente se omite.
- Consideramos \mid como “suma”, precedencia más baja.
- Sabemos que \cdot y \mid son **asociativos**, no importa el orden.

Ejemplos:

- a^*b^* : son todas las palabras que comienzan con 0, 1 o muchas a 's, y enseguida continúa con 0, 1 o muchas b 's.
- $(a \mid b)^*$: son todas las combinaciones que podemos formar con a 's y con b 's.
- $a \mid b^*$: palabras que pueden ser 1 a , muchas b 's o una palabra vacía (ϵ).

- $a(a|b)^*b$: todas las palabras sobre $\{a, b\}$ que comiencen con a y terminen con b .

Algunas propiedades:

- $(R^*)^* = R^*$
- $R^* = R^+ | \epsilon$
- $R^* R^* = R^*$
- $R^+ R^* = R^+$
- $R^* R^+ = R^+$

Teorema 1.1. Sea la ecuación entre lenguajes sobre Σ :

$$X = A \cdot X | B \quad (1.1)$$

dados $A, B \subseteq \Sigma^*$. La solución a la ecuación de lenguajes (1.1) viene dada por:

$$X = A^* B \quad (1.2)$$

Idea de Demostración Hallar una aproximación...

Sabemos que $B \subseteq X$. Si tomamos B y substituimos al lado derecho: $X^{(1)} = AB \cup B$. Nuevamente: $X^{(2)} = A^2B \cup AB \cup B$. Al final nos queda:

$$\rightarrow X = A^* B \quad (1.3)$$

Veamos:

$$\begin{aligned} A(A^* B) | B &= AA^* B | B \\ &= A^+ B | B \\ &= (A^+ | \epsilon) B \\ &= A^* B = X \end{aligned}$$

O sea, $X = A^* B$ es una solución. ¿Hay más?

Si $\epsilon \in A$, cualquier conjunto que incluye $A^* B$ **es solución** (elija $\epsilon \cdot X = X$ como primer término).

Si $\epsilon \notin A$: sospechamos solución única...

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $\alpha \in X$, $\alpha \notin A^* B$. Entonces:

$$\alpha \in A \cdot X \cup B$$

Sabemos $\alpha \notin B \subseteq A^* B$. Por lo tanto, $\alpha \in A \cdot X$. O sea, $\alpha = uv$, con $u \in A$ y $v \in X$. Como $\epsilon \notin A$, $|u| > 0$, $|v| < |\alpha|$, y podemos repetir el mismo razonamiento con $v \notin A^* B$. Esto es absurdo, no podemos acortar indefinidamente. \square