

INF155: Informática Teórica

Ayudantía 8: “Recursivamente Recursivo”

Aldo Berrios Valenzuela

Miércoles 15 de Junio de 2016

8. Ayudantía

8.1. Definiciones

- Lenguaje Recursivamente Enumerable (R.E.): L es R.E. si $\exists M / \mathcal{L}(M) = L$
- Lenguaje no recursivamente enumerable (no R.E.): L no es R.E. si $\nexists M / \mathcal{L}(M) = L$
- Lenguaje recursivo: L es recursivo si existe una máquina de turing M tal que $\mathcal{L}(M) = L$ cumpliendo:
 - a. $\omega \in L$, M se detiene y acepta.
 - b. $\omega \in L$, M se detiene y no acepta.

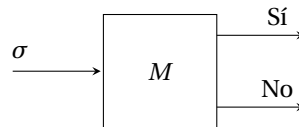


Figura 1: Si M es capaz de responder “Sí” o “No” (decidible) ante una entrada σ , entonces es recursivo. En otras palabras, $\mathcal{L}(M)$ es recursivo.

- Lenguaje R.E. no recursivo si L es R.E. (existe una máquina de turing M tal que $\mathcal{L}(M) = L$), pero existe algún ω tal que M no se detiene:

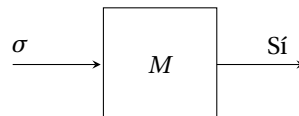


Figura 2: Si M acepta una entrada σ , entonces es recursivamente enumerable. Esto es lo mismo que $\mathcal{L}(M)$ es R.E.

Note que:

- L es recursivo $\leftrightarrow L$ es decidible.
- L es no recursivo $\leftrightarrow L$ es no decidible.

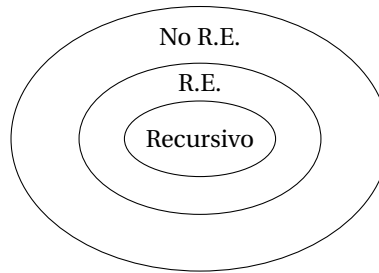


Figura 3: Diagrama de Venn que muestra de forma gráfica, que un lenguaje recursivo es subconjunto de los recursivamente enumerables, y ambos son subconjuntos de aquellos que no son R.E.

8.2. Teoremas

1. Si L es recursivo, \bar{L} también lo es (La demostración se encuentra con cajitas y flechas en la Figura 4).

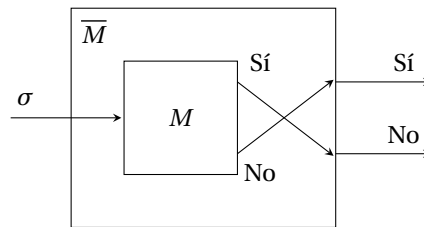


Figura 4: Construcción de \bar{M} . Como puede observar, si M acepta, entonces \bar{M} no acepta y viceversa.

2. Si L y \bar{L} son R.E., L es recursivo (y por lo tanto \bar{L} también lo es) (La demostración se encuentra con cajitas y flechas en la Figura 5).

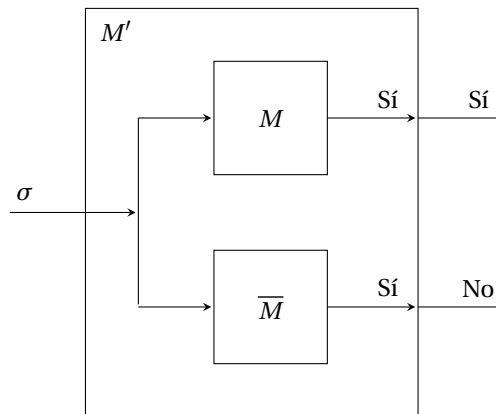


Figura 5: Máquina de Turing que echa a correr σ sobre L y \bar{L} en paralelo.

Note que existen casos donde L es R.E., pero \bar{L} no es R.E.

Opciones:

L	\bar{L}
Recursivo	Recursivo
R.E.	R.E.
R.E. no recursivo	No R.E.
No R.E.	R.E. no recursivo
No R.E.	No R.E.

Cuadro 1: El caso de que ambos sean R.E. ya vimos que los dos serían recursivos.

8.3. Ejercicios

Ejercicio 8.1. ¿Son cerrados los lenguajes R.E. respecto a la unión?

Demostración. Con cajitas y flechas, la demostración bastante informal es:

□

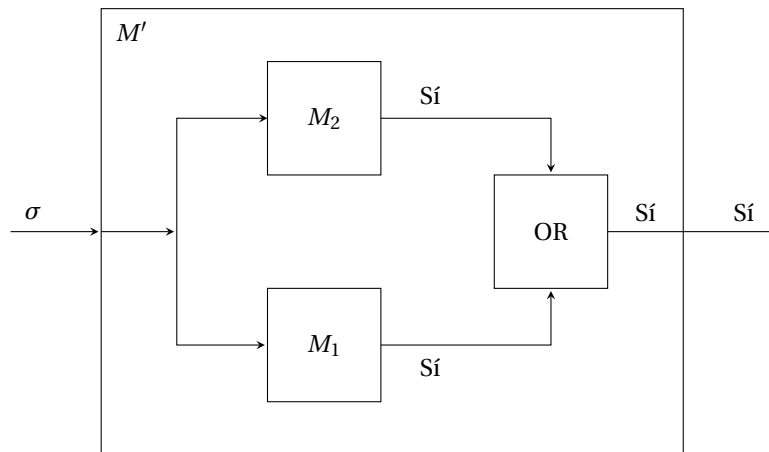


Figura 6: La máquina de Turing OR responderá "Sí", siempre y cuando M_1 o M_2 (incluso ambas), respondan "Sí". Luego, M' simula la unión de dos lenguajes R.E.

Nótese que OR, funciona de la misma manera que una compuerta OR.

Como puede observar, podemos aplicar el mismo truco del ejercicio 8.1 para demostrar que, de una forma bastante informal, que los lenguajes recursivos son cerrados respecto a la unión (Figura 7).

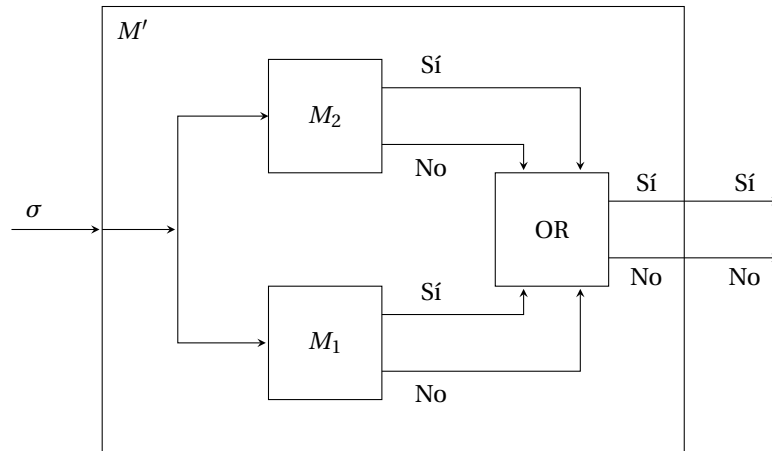


Figura 7: Como las TM M_1 y M_2 son decidibles, podemos construir OR que simule una compuerta OR. Si M_1 y M_2 responden “No”, entonces M' responde “No”. En caso contrario M' responde “Sí”.

Ejercicio 8.2. ¿Son cerrados respecto a la intersección los lenguajes recursivos?

Demostración. Sean L_1 y L_2 con TM's M_1 y M_2 : $\mathcal{L}(M_1) = L_1$ y $\mathcal{L}(M_2) = L_2$ con M_1 y M_2 máquinas que siempre se detienen, usando cajitas y flechas vemos que nuestra respuesta es:

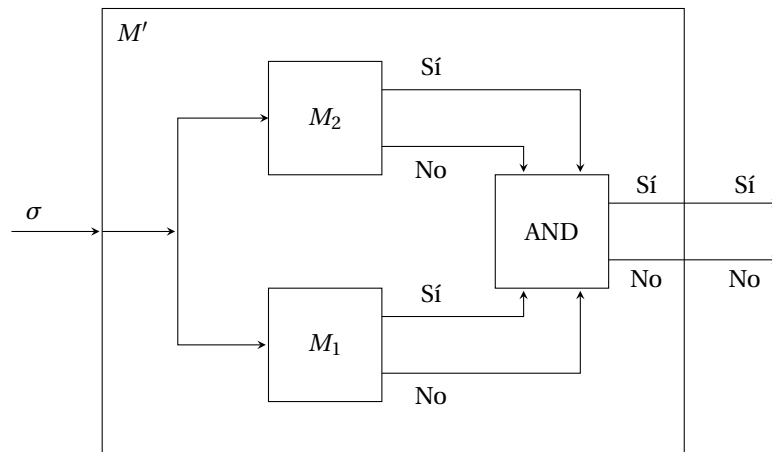


Figura 8: La TM AND responderá “Sí”, siempre y cuando M_1 y M_2 responda “Sí”. En caso contrario AND responde “No”. Nótese que la respuesta de M' es será igual a lo que responda AND.

No olvide que la TM M' simula la unión de los lenguajes L_1 y L_2 , ambos recursivos.

□