

# INF155: Informática Teórica

## Clase 8: Lema de Bombeo

Aldo Berrios Valenzuela

Jueves 31 de Marzo de 2016

¿Hay lenguajes no regulares?

### 1. Lema de Bombeo

---

**Teorema 1.1** (Lema de Bombeo). Si  $L$  es un lenguaje regular, hay una constante  $N > 0$  tal que si  $\sigma \in L$ ,  $|\sigma| \geq N$  podemos escribir:

$$\sigma = \alpha\beta\gamma$$

con  $|\alpha\beta| \leq N$ ,  $\beta \neq \epsilon$  tal que para todo  $k \geq 0$ :

$$\alpha\beta^k\gamma \in L$$

*Demostración.* Sea  $L = \mathcal{L}(M)$  donde  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  es un DFA. Sea  $N = |Q|$ , y sea  $\sigma \in L$  con  $|\sigma| \geq N$ , y consideremos los estados por los que pasa  $M$  al procesar  $\sigma = a_1 a_2 \cdots a_n$

$$\begin{array}{ccccccccc} & a_1 & & a_2 & & \cdots & & a_n \\ q_0 & & q_1 & & q_2 & & q_{n-1} & & q_n \end{array}$$

Esta es una lista de  $n + 1 > |Q|$  estados, por el principio del palomar al menos uno se repite.

Sea  $q_i = q_j$  el primer índice para el que un estado se repite,  $i < j$ . Es claro que  $j \leq N$ , porque:

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} & a_1 & & a_2 & & \cdots & & a_N \\ q_0 & & q_1 & & q_2 & & q_{N-1} & & q_N \end{array} \right| \cdots \begin{array}{ccc} & a_n \\ q_{N-1} & & q_n \end{array}$$

La repetición ocurre en este rango

Vale decir:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & a_1 & & \cdots & & a_i & & \cdots & & a_j & & \cdots & & a_N & & \cdots & & a_n \\ q_0 & & & & & q_i & & & & q_j = q_i & & & & & & & & q_n \in F \end{array}$$

Sea  $a_1 \cdots a_i = \alpha$ ,  $a_{i+1} \cdots a_j = \beta$ ,  $a_{j+1} \cdots a_n = \gamma$ .

Sabemos:

$$|\alpha\beta| \leq N, \quad \beta \neq \epsilon$$

$\delta(q_i, \beta) = q_i$ ,  $\delta(q_0, \alpha) = q_i$ ,  $\delta(q_i, \gamma) \in F$ . O sea,  $\delta(q_0, \alpha\beta^k\gamma) \in F$ . Vale decir,  $\alpha\beta^k\gamma \in L$ , para todo  $k \geq 0$ . □

**Observación** El Lema de Bombeo es una propiedad que todo lenguaje regular debe cumplir.

**Uso** Para demostrar que lenguajes no son regulares, usando demostración por contradicción.

**Teorema 1.2.** El lenguaje

$$L = \{a^k b^k : k \geq 0\}$$

no es regular.

*Demostración.* Supongamos que  $L$  es regular, por lo que cumple el lema del bombeo.

- Sea  $N$  la constante del lema de bombeo (*Queremos comprobar que el lema de bombeo no se cumple, o sea, tengo que demostrar que para ningún  $N$  sirve*).
- Elegimos  $\sigma = a^N b^N$ ,  $|\sigma| = 2N \geq N$  (*el lema asegura que todo  $\sigma \in L$ ,  $|\sigma| \geq N$  funciona, puedo elegir uno cómodo*).
- Por el lema de bombeo,  $\sigma = \alpha\beta\gamma$ ,  $|\alpha\beta| \leq N$ ,  $\beta \neq \epsilon$ , y para todo  $k \geq 0$ ,  $\alpha\beta^k\gamma \in L$ . (*Nótese que no tengo ningún control sobre  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Si usted “fija” alguna de estas particiones, su demostración no servirá*).
- En este caso, significa que  $\alpha \in a^*$ ,  $\beta \in a^+$ . O sea,  $\alpha\gamma$  tiene menos  $a$  que  $b$ ,  $\alpha\gamma \notin L$ . (*Puedo elegir  $k$  (el lema dice que todo  $k \geq 0$  funciona... basta con encontrar uno que falle). Nótese que si  $k = 1$ , el cuento no tendrá ninguna gracia.*)

Si elegimos  $k = 0$ , vemos que la cantidad de  $a$ 's superará la cantidad de  $b$ 's, por lo tanto,  $\alpha\beta^0\gamma \notin L$ . Sin embargo, en un comienzo supusimos que  $L$  era regular. Entonces, por contradicción se tiene que  $L$  no es regular.  $\square$

**Teorema 1.3.**  $L = \{a^{k^2} : k \geq 0\}$  no es regular.

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos  $L$  regular, y sea  $N$  la constante del lema de bombeo. Elegimos  $\sigma = a^{N^2}$ ,  $|\sigma| = N^2 \geq N$ . El lema asegura que existen  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $\alpha\beta\gamma = \sigma$ ,  $|\alpha\beta| \leq N$ ,  $\beta \neq \epsilon$ , tales que  $\alpha\beta^k\gamma \in L$  para todo  $k \geq 0$ . Considerando únicamente los largos, sabemos

$$0 < |\beta| \leq N$$

Sea  $u = |\beta|$ . Entonces:

$$0 < u \leq N$$

$$\underbrace{N^2 - u}_{|\alpha\gamma|} + \underbrace{ku}_{|\beta^k|} \quad \text{es un cuadrado para todo } k \geq 0$$

$$N^2 + (k-1)u \quad \text{es cuadrado para } k \geq 0$$

Consideremos  $k = 2$ . Entonces

$$N^2 + u$$

es un cuadrado, pero

$$N^2 < N^2 + u \leq N^2 + N \leq N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$$

Por lo tanto,  $N^2 + u$  no es cuadrado. Luego, por contradicción, se tiene que  $L$  no es regular.  $\square$