

INF155: Informática Teórica

Clase 22: Recursivamente Recursivo

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 31 de Mayo de 2016

1. Recursivamente Recursivo

Teorema 1.1. L_d no es R.E.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $L_d = \mathcal{L}(M_k)$. Consideremos σ_k . ¿Pertenece o no a L_d ?

- Si $\sigma_k \in L_d$, quiere decir que $\sigma_k \in \mathcal{L}(M_k)$, es una contradicción.
- Si $\sigma_k \notin L_d$, quiere decir que $\sigma_k \notin \mathcal{L}(M_k)$, o sea, $\sigma_k \in L_d$. Una contradicción.

□

Definición 1.1. Recursivo: Hay un algoritmo (instrucciones precisas, siempre termina)

Definición 1.2 (Idea). Recursivo Enumerable: Una TM multicinta, con una cinta de salida en la que va escribiendo las palabras del lenguaje.

Teorema 1.2. Si L es aceptado por una TM, es aceptado por una TM determinista.

Demostración. Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una TM. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Q \cap \Gamma = \emptyset$ (queremos anotar IDs en una cinta), y elegimos un separador $\# \notin Q \cup \Gamma$.

Nuestra idea es escribir IDs de M , separados por $\#$, en la cinta. Construimos una TM que hace lo siguiente:

- Dado σ , anota $\#q_0\sigma\#$ en su cinta. ($q_0\sigma$ corresponde a una descripción instantánea de la TM)
- En un ciclo:
 - Retrocede al último ID no cerrado en la cinta.
 - Dado el estado en el ID con el símbolo siguiente, determinar las movidas posibles de M .
Para cada movida de M :
 - Copia el último ID al final, modificandolo para indicar esa movida.
 - Si el ID construido recién es de aceptación, acepta.
 - Cierra el ID considerado.

Por ejemplo, si en una descripción instantánea ID_0 de la TM vemos que tiene tres movidas posibles, entonces se van a originar tres descripciones instantáneas diferentes (ID_1 , ID_2 e ID_3). De la misma forma, si ID_1 tiene dos movidas posibles, se van a originar 2 descripciones adicionales (ID_4 e ID_5).

Luego, el esquema de la idea es:

- Comenzamos con la ID_0 :

$\#ID_0\#$

- ID_0 tiene tres movidas posibles, representadas por ID_1 , ID_2 e ID_3 . Se agregan a la cinta:

$$\#ID_0\#ID_1\#ID_2\#ID_3\#$$

- Ya agregamos todas las descripciones instantáneas de ID_0 , así que ahora hacemos lo mismo con ID_1 .
Previamente dijimos que presenta dos opciones representadas por las descripciones instantáneas ID_4 e ID_5 .
Las agregamos:

$$\#ID_0\#ID_1\#ID_2\#ID_3\#ID_4\#ID_5\#$$

- Ya agregamos todas las descripciones instantáneas de ID_1 , así que ahora continuamos agregando las descripciones instantáneas de ID_2 .

\vdots

□

Teorema 1.3. \bar{L}_d es recursivamente enumerable.

Demostración (vía concepto de enumerar). $\bar{L}_d = \{\sigma_i : \sigma_i \in \mathcal{L}(M_i)\}$

Podemos **enumerar** \bar{L}_d vía:

- Ejecute M_1 sobre σ_1 por 0 pasos.
- Ejecute M_1 sobre σ_1 por 1 pasos.
- Ejecute M_2 sobre σ_2 por 0 pasos.
- Ejecute M_1 sobre σ_1 por 1 pasos.
- Ejecute M_2 sobre σ_2 por 1 pasos.
- Ejecute M_i sobre σ_i por k pasos (en orden de $i + k$ creciente)

En el fondo lo que estamos haciendo es lo siguiente:

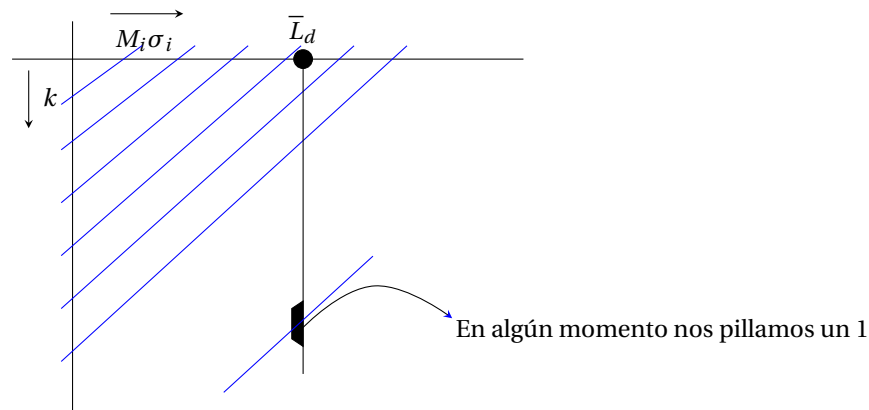


Figura 1: Cada corte diagonal representa ejecutar la Máquina de Turing M_i con entrada σ_i en k pasos.

□

Demostración (vía definición de \bar{L}_d). Alternativamente, dado i , simule M_i sobre σ_i ; por definición de \bar{L}_d , en algún momento tendrá que aceptar. □

Teorema 1.4. Si L es recursivamente enumerable, y su complemento es recursivamente enumerable, entonces L es recursivo (y \bar{L} también).

Demostración. Suponemos dadas TM M con $L = \mathcal{L}(M)$ y \bar{M} con $\bar{L} = \mathcal{L}(\bar{M})$.

Corremos M y \bar{M} en paralelo, la primera que acepte nos dice si $\sigma \in L$ o $\sigma \in \bar{L}$, con lo que tenemos que una TM que siempre se detiene que acepta L . O sea, L es recursivo (y también lo es \bar{L}) \square

Corolario 1.4.1. Si L es R.E., pero no recursivo, \bar{L} no es R.E.

Tablita de posibilidades:

L recursivo	y	\bar{L} recursivo
L R.E.	y	\bar{L} R.E. $\Rightarrow L, \bar{L}$ recursivos.
L R.E., no recursivo	y	\bar{L} no R.E.
L no R.E.	y	\bar{L} no R.E.

Cuadro 1: Tablita de posibilidades del Teorema 1.4. Nótese que los dos primeros casos son exactamente el mismo.

1.1. ¡Cajitas!

Idea Representar TM por una cajita.

- Si M es una TM que siempre se detiene:

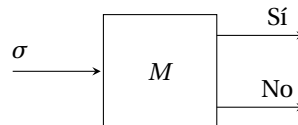


Figura 2: Si M es capaz de responder "Sí" o "No" (decidible) ante una entrada σ , entonces es recursivo. En otras palabras, $\mathcal{L}(M)$ es recursivo.

- Si M es una TM:

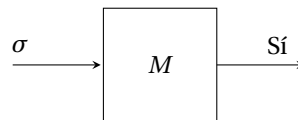


Figura 3: Si M acepta una entrada σ , entonces es recursivamente enumerable. Esto es lo mismo que $\mathcal{L}(M)$ es R.E.

Casos como los de la Figura 3 puede ocurrir: la TM se queda dando vueltas indefinidamente hasta dar una respuesta.

Teorema 1.5. Si L es recursivo, \bar{L} es recursivo.

Demostración. Sea $L = \mathcal{L}(M)$. La TM de la Figura 4 acepta \bar{L} . \square

Teorema 1.6. Si L y \bar{L} son R.E., ambos son recursivos. *Dicho de otra forma, si sabemos que L y \bar{L} son recursivamente enumerables, entonces L y \bar{L} son recursivos (recuerde que recursivo es más fuerte que R.E.).*

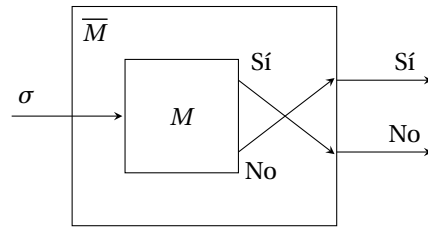


Figura 4: Construcción de \overline{M} . Como puede observar, si M acepta, entonces \overline{M} no acepta y viceversa.

Demostración. Sea $L = \mathcal{L}(M)$, $\overline{L} = \mathcal{L}(\overline{M})$. La TM de la Figura 5 acepta L .

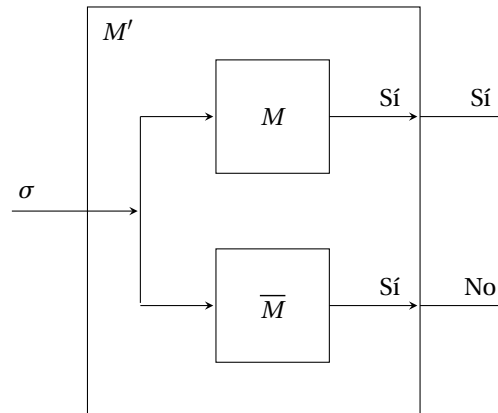


Figura 5: Máquina de Turing que echa a correr σ sobre L y \overline{L} en paralelo.

Echamos a correr M y \overline{M} sobre una palabra σ en paralelo (cada vez que una TM haga una movida, la otra también hará su propio movimiento). Alguna de las dos TM tendrá que responder primero, ya que si $\sigma \notin L$, entonces $\sigma \in \overline{L}$ y viceversa. Luego, integramos M y \overline{M} en una TM M' que, se encarga de transformar el “Sí” de \overline{M} en un “No” de M' . Dado esto, vemos que si L y \overline{L} son R.E., entonces podemos construir una TM que nos diga que ambos lenguajes en realidad son recursivos. \square

Usando cajitas podemos demostrar que:

- Demostrar que la unión de dos lenguajes recursivos también es recursivo.
- Cerrado respecto al complemento: use el complemento y la unión.
- Se sospecha que son cerrados respecto a las operaciones de las expresiones regulares.

Algunas observaciones:

- Aceptado no significa que siempre va a tener la respuesta: Recuerde los casos donde la máquina se queda dando vueltas, y nunca entrega la respuesta pero si acepta la palabra que se le ingrese.
- L_u toma una máquina de Turing y una palabra σ