

INF155: Informática Teórica

Ayudantía 5: Gramáticas

Miércoles 27 de Abril de 2016

1. Gramáticas

Definición Una gramática G se define por $G = (\Sigma, N, P, S)$ donde:

- Σ : alfabeto de no terminales (minúsculas).
- N : alfabeto de terminales (mayúsculas).
- P : conjunto de producciones.
- S : símbolo de partida.

Ejemplo de producciones:

$$S \rightarrow aA \mid bB \quad \begin{cases} S \rightarrow aA \\ S \rightarrow bB \end{cases}$$

$$A \rightarrow aA \mid \epsilon \quad \begin{cases} A \rightarrow aA \\ A \rightarrow \epsilon \end{cases}$$

$$B \rightarrow bB \mid \epsilon \quad \begin{cases} B \rightarrow bB \\ B \rightarrow \epsilon \end{cases}$$

Supongamos que tenemos $\sigma = aaAB$. Aplicar una producción es simplemente encontrar una secuencia de terminales y no terminales que estén en el lado izquierdo de la producción dentro de σ , y reemplazar en σ por el lado derecho de la producción. En sigma vemos:

$$\begin{aligned} \sigma &= aaAB && \text{;aplicamos la producción } A \rightarrow aA \text{ en el no-terminal que tenemos subrayado} \\ &= aaaAB && \text{;aplicamos la producción } B \rightarrow bB \text{ en el no-terminal que tenemos subrayado} \\ &= aaaAB && \text{;aplicamos la producción } B \rightarrow \epsilon \text{ en el no-terminal que tenemos subrayado} \\ &= aaa\epsilon bB = aaabB \\ &\vdots \end{aligned}$$

1.1. Jerarquía de Chomsky

Catalogamos la gramática dependiendo de las producciones que estas posean:

- **Tipo 0:** son las gramáticas sin restricciones.
- **Tipo 1:** son gramáticas sensibles al contexto. Nunca se acortan. Ejemplo:

$$\alpha \rightarrow \beta \quad 1 \leq |\alpha| \leq |\beta|$$

Se les dice “sensibles al contexto” porque dependen de los terminales y no terminales que los rodean. Por ejemplo:

$$aAb \rightarrow AAbbbb$$

Como puede observar, para que la producción anterior pueda ser utilizada debe cumplirse que en alguna parte de $\sigma \in (\Sigma^* \cup N^*)$ debe aparecer la secuencia aAb (depende de lo que lo rodea).

- **Tipo 2:** son las gramáticas de libre contexto, es decir, no dependen de lo que lo rodean. Para que una gramática sea de tipo 2 debe cumplirse que todas las producciones deben tener exactamente 1 no-terminal en su lado izquierdo.

Ejemplo:

$$A \rightarrow aBC$$

$$B \rightarrow bB$$

$$C \rightarrow cC$$

Nótese que estas gramáticas generan lenguajes regulares y no regulares.

- **Tipo 3:** son las gramáticas regulares, y obviamente, generan lenguajes regulares.

El lado derecho de cada producción tiene a lo más un no-terminal y siempre en el extremo derecho. Algunos ejemplos:

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow bB$$

Importante: A medida que vamos bajando, los tipos de gramática se van “acumulando”, es decir, las gramáticas de tipo 1 también son de tipo 0, las de tipo 2 son de tipo 1 y 0... y se imaginará que las de tipo 3 son de tipo 2, 1 y 0.

2. Ejercicios

Ejercicio 1 Sea $G = (\Sigma, N, P, S)$ una gramática, donde:

- $N = \{S\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \epsilon\}$

Responda:

- ¿De qué tipo es la gramática?
- ¿Qué lenguaje genera?

Solución

Existe una producción de la forma cuyo lado derecho es ϵ (se acorta), por lo tanto la gramática es de tipo 0.

Para encontrar el lenguaje que genera la gramática debemos ir constuyendo alguna palabra y sospechar:

$$\begin{aligned} &aSb \\ &aaSbb \\ &aaaSbbb \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es bastante trivial ver que el lenguaje generado por la gramática del enunciado es:

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Ejercicio 2 ¿Qué lenguaje describe la siguiente gramática?:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAbM \\ A &\rightarrow abF \\ Mb &\rightarrow bM \\ Fb &\rightarrow bF \\ MB &\rightarrow Bc \\ FB &\rightarrow c \end{aligned}$$

Solución

Contiene un no-terminal que “acorta” la palabra generada:

$$FB \rightarrow c$$

Por lo tanto, la gramática es de tipo 0.

Para obtener el lenguaje que describe la gramática tendremos que ir construyendo una palabra y sospechar...

$$S \rightarrow \underline{AB} \Rightarrow aAb\underline{MB} \Rightarrow a\underline{Ab}BC \Rightarrow aab\underline{Fb}BC \Rightarrow aabb\underline{FB}c \Rightarrow aabbcc$$

Tanteando, vemos que el lenguaje generado por la gramática de tipo 0 es:

$$L = \{a^n b^n c^n : n \geq 2\}$$

Ejercicio 3 Sea L un lenguaje cuyo alfabeto es $\Sigma = \{x, y, z\}$ que acepta un string w donde no hay x 's consecutivos, ni y 's consecutivos y tampoco z 's consecutivos. Además $|w| \geq 1$.

Diseña una gramática de contexto libre para L .

Solución

Formamos la gramática de contexto libre en base al siguiente razonamiento:

- Cada vez que agregamos una x , el siguiente no terminal debe ser y o z .
- Cada vez que agregamos una y , el siguiente no terminal debe ser x o z .
- Cada vez que agregamos una z , el siguiente no terminal debe ser x o y .

Bajo este concepto definimos la gramática de contexto libre G como $G = (\Sigma, N, P, S)$ con $N = \{X, Y, Z\}$, y donde el conjunto de producciones está dado por:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow X|Y|Z \\ X &\rightarrow xY|xZ|x \\ Y &\rightarrow yX|yZ|y \\ Z &\rightarrow zX|zY|z \end{aligned}$$

Ejercicio 4 Diseña una gramática de contexto libre para $L = \{a^i b^{i+j} c^j : i, j \geq 1\}$

Solución

Cada vez que agregamos una a a la palabra, también deberemos agregar una b por la derecha. De la misma forma, por cada c que agregamos también debemos concatenar previamente con una b .

Entonces, sea $G = (\Sigma, N, P, S)$ una gramática de contexto libre con $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B\}$ y conjunto de producciones:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow aAb \mid ab$$

$$B \rightarrow bBc \mid bc$$