

1. Modelos Matemáticos

Un modelo matemático consta de:

- **Función objetivo:** Medida cuantitativa de la calidad de la alternativa.
- **Variables:** Es lo que se desea conocer al optimizar, es decir, es la decisión a tomar que afecta el criterio de optimización.
- **Restricciones:** Limitaciones a las cuales están sujetas las variables.
- **Constantes o Parámetros:** Valores conocidos a priori (instancias de un problema).

1.1. Ejercicio 1: Refinería de Petróleo

Una refinería de petróleos produce dos tipos de gasolina sin plomo: regular y extra, los cuales vende a su cadena de estaciones de servicio en US\$12 y US\$14 por barril, respectivamente. Ambos tipos se preparan del inventario de petróleo nacional refinado y de petróleo importado refinado y deben cumplir las especificaciones que se presentan en la siguiente tabla:

	Presión máxima de vapor	Octanaje mínimo	Demanda máxima [barril/semana]	Entregas mínimas [barril/semana]
Regular	23	88	100.000	50.000
Extra	23	93	20.000	5.000

Las características del inventario de petróleos refinados se muestran en la siguiente tabla:

	Presión de vapor	Octanaje	Inventario [barril]	Costo [US\$/barril]
Nacional	25	87	40.000	8
Importado	15	98	60.000	15

Formule un modelo que permita maximizar la ganancia semanal de la refinería.

SOLUCIÓN Ejercicio 1:

Para poder formular un modelo para el problema supondremos que no existen pérdidas en el proceso de refinamiento y que tanto el octanaje como la presión de vapor se pueden mezclar linealmente.

De acuerdo al supuesto anterior debemos definir **Variables** que nos permitan controlar qué proporción de cada tipo de petróleo se empleará para fabricar cada tipo de gasolina, así:

x_{ij} : Cantidad (en barriles) de petróleo refinado del tipo i para fabricar gasolina del tipo j .

Donde $i = \{1[\text{nacional}], 2[\text{importado}]\}$ y $j = \{1[\text{regular}], 2[\text{extra}]\}$

Como se conoce el precio de venta de cada gasolina y el costo de cada barril de petróleo, la **Función Objetivo** se reduce a maximizar la diferencia entre ingresos y costos, es decir, las utilidades.

$$\text{Max } 12(x_{11} + x_{21}) + 14(x_{12} + x_{22}) - 8(x_{11} + x_{12}) - 15(x_{21} + x_{22})$$

A continuación construimos las **Restricciones** respecto de inventario disponible y demanda de cada tipo de gasolina (se explican por si solas):

$$x_{11} + x_{12} \leq 40000 \text{ (Inventario petróleo nacional)}$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 60000 \text{ (Inventario petróleo importado)}$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 50000 \text{ (Demanda mínima gasolina regular)}$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 100000 \text{ (Demanda máxima gasolina regular)}$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 5000 \text{ (Demanda mínima gasolina extra)}$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 20000 \text{ (Demanda máxima gasolina extra)}$$

Las restricciones de presión de vapor y de octanaje mínimo deben ser normalizadas respecto de la cantidad total fabricada, que no es necesariamente la cantidad máxima o mínima posible de fabricar.

$$\frac{25x_{11} + 15x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \leq 23 \text{ (Presión de vapor máxima gasolina regular)}$$

$$\frac{25x_{12} + 15x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \leq 23 \text{ (Presión de vapor máxima gasolina extra)}$$

$$\frac{87x_{11} + 98x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \geq 88 \text{ (Octanaje mínimo gasolina regular)}$$

$$\frac{87x_{12} + 98x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \geq 93 \text{ (Octanaje mínimo gasolina extra)}$$

Finalmente, el modelo queda completo con las condiciones de naturaleza de las variables:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \times j$$

1.2. Ejercicio 2: Problema de la Mochila

Un excursionista planea salir de campamento. Hay 5 artículos que desea llevar consigo, pero entre todos sobrepasan los 30 [Kg] que puede cargar en su mochila. Construya un modelo que permita llevar la mayor cantidad de artículos útiles. La utilidad se representa en la siguiente tabla:

Artículo	1	2	3	4	5
Peso [Kg]	21	13	11	8	3
Utilidad	100	60	70	15	15

SOLUCIÓN Ejercicio 2:

Se define la variable:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se lleva el objeto } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La función objetivo es maximizar la utilidad. Ponderamos:

$$\text{Max } 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5$$

La única restricción es el peso máximo que puede soportar la mochila:

$$21x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 8x_4 + 3x_5 \leq 30$$

1.3. Ejercicio 3: Doctores

La sala de emergencias de un hospital necesita tener doctores disponibles, para que exista un individuo calificado cada vez que se requiera realizar un procedimiento. Para cada doctor disponible, el salario y su disponibilidad es conocida. Modele de tal forma que los doctores elegidos cumplan con la cobertura de todos los procedimientos, minimizando el costo en remuneraciones.

	Doc 1	Doc 2	Doc 3	Doc 4	Doc 5	Doc 6
Procedimiento 1	✓			✓		
Procedimiento 2	✓				✓	
Procedimiento 3		✓	✓			
Procedimiento 4	✓					✓
Procedimiento 5		✓	✓			✓
Procedimiento 6		✓				

Cuadro 1: Aptitudes de los distintos doctores

SOLUCIÓN Ejercicio 3:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el procedimiento } i \text{ lo puede realizar el doctor } j \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

c_j : Remuneración del doctor j por ser contratado

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se contrata del doctor } j \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\text{Min} \sum_{j=0}^n c_j x_j$$

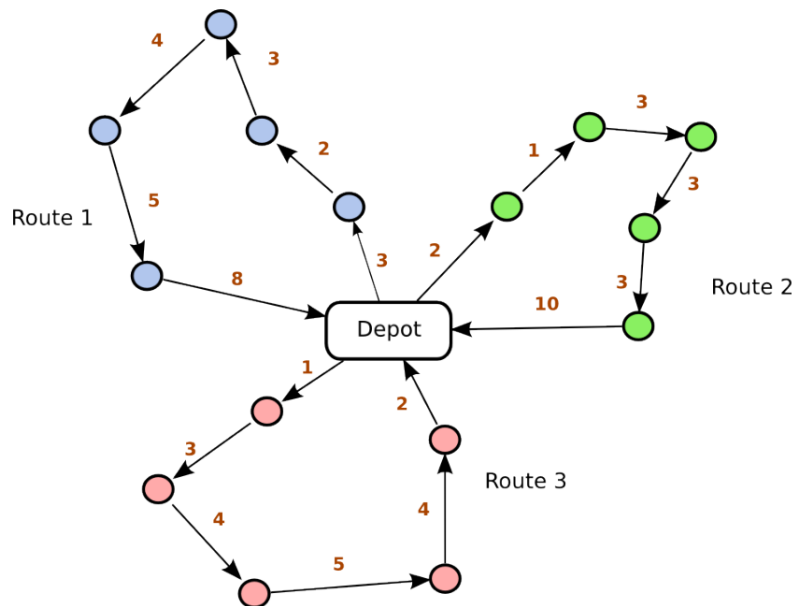
Restricciones:

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i \quad (\text{Al menos un doctor para cada procedimiento } i)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad (\text{naturaleza de las variables})$$

1.4. Ejercicio 4: The Vehicle Routing Problem

El objetivo es minimizar el costo de distribución para alguna tienda con *delivery*, y puede ser descrito como el "problema de asignar la entrega o lista de rutas desde un almacén o punto inicial, a un número de clientes en distintos lugares geográficos. Todo esto sujeto a condiciones y restricciones de despacho."



Para el problema genérico se define el grafo $G = (V, A)$, donde los vértices $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ representan los sitios a enrutar, así se considera que el primero v_1 corresponde al almacén, el cual posee M vehículos para realizar la distribución con una capacidad Q cada uno. Por otra parte A corresponde al conjunto de posibles conexiones para enrutar entre dos lugares a despachar (aristas del grafo) y cada una tiene un costo asociado. Además cada vértice tiene una demanda no-negativa (donde el almacén tiene una demanda nula).

SOLUCIÓN Ejercicio 4

Un posible modelado para el problema es:

Parámetros

C_{ij} : Costo de ir desde v_i hasta v_j

D_i : Demanda del nodo v_i

Variables

$$X_{kij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el vehículo } k \text{ viaja desde el nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

u_{ki} : Creada para evitar rutas k con ciclos no hamiltoneanos desde el nodo i

Función Objetivo: Minimizar el costo de la distribución.

$$\min \sum_k \sum_i \sum_j C_{ij} X_{kij}$$

Restricciones

- Sólo puede haber un vehículo asignado a una ruta

$$\sum_k \sum_i X_{kij} = 1 \quad \forall j \neq 0$$

- Cada vez que un vehículo llega a un nodo debe salir

$$\sum_i X_{kip} = \sum_i X_{kpj}$$

- Los vehículos no pueden exceder su capacidad

$$\sum_i D_i (\sum_i X_{kij}) \leq Q$$

- Sólo una salida para cada ruta

$$\sum_{j, j \neq i} X_{kij} = 1 \quad \forall i$$

- Sólo una entrada para cada ruta

$$\sum_{i, i \neq j} X_{kij} = 1 \quad \forall j$$

- Evitar ciclos no hamiltoneanos en las rutas

$$u_{k1} = 1 \quad \forall k$$

$$2 \leq u_{ki} \leq N \quad \forall i \neq 1$$

$$u_{ki} - u_{kj} + 1 \leq (N - 1)(1 - X_{kij}) \quad \forall i \neq 1, \forall j \neq 1$$

2. CSP, Problemas de Satisfacción de Restricciones

Estos problemas no buscan una optimización por lo que no poseen una función objetivo. En estos casos lo que se busca es simplemente que se satisfagan las restricciones.

2.1. Ejercicio 5: Acertijo de Einstein

El problema de la cebrá: cinco hombres de distintas nacionalidades viven en las 5 primeras casas de una calle. Cada uno tiene una profesión, un animal favorito y una bebida favorita (cada uno diferente de los otros). Se sabe que:

- El inglés vive en la casa roja
- El español tiene un perro
- El japonés es pintor
- El noruego vive en la primera casa de la izquierda
- El propietario de la casa verde bebe café
- La casa azul está a la derecha de la blanca
- El escultor cría caracoles
- El diplomático vive en la casa amarilla
- En la casa central beben leche
- La casa del dueño del gato está al lado de la del bebedor de té
- El violinista bebe jugo de fruta
- El zorro esta en la casa vecina del médico
- El noruego no es vecino directo del chileno

Formule el modelo que permita determinar quien es el dueño de la cebrá, y quien bebe agua.

SOLUCIÓN Ejercicio 5

Variables:

- Nacionalidad $N_i = \{\text{Inglés, Español, Japonés, Noruego, Chileno}\}$
- Mascota $M_i = \{\text{Perro, Caracoles, Gato, Zorro, Cebra}\}$
- Bebida $B_i = \{\text{Café, Té, Leche, Jugo, Agua}\}$
- Color $C_i = \{\text{Roja, Verde, Azul, Amarilla, Blanca}\}$
- Profesión $P_i = \{\text{Pintor, Escultor, Diplomático, Violinista, Médico}\}$

Utilizando $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ donde cada uno toma su respectivo valor dependiendo si se trata de nacionalidad, mascota, bebida, color o profesión. Así cada una de las variables tomará el número de la casa a la cual se le esté asociando el atributo, así por ejemplo la expresión $N_5 = 2$ indica que el chileno vive en la segunda casa.

Restricciones

- El inglés vive en la casa roja: $N_1 = C_1$
- El español tiene un perro: $N_2 = M_1$
- El japonés es pintor: $N_3 = P_1$
- El noruego vive en la primera casa de la izquierda: $N_4 = 1$
- El propietario de la casa verde bebe café: $C_2 = B_1$
- La casa azul está a la derecha de la blanca: $C_3 = C_5 + 1$
- El escultor cría caracoles: $P_2 = M_2$
- El diplomático vive en la casa amarilla: $P_3 = C_4$
- En la casa central beben leche: $B_3 = 3$
- La casa del dueño del gato está al lado de la del bebedor de té: $|M_3 - B_2| = 1$
- El violinista bebe jugo de fruta: $P_4 = B_4$
- El zorro esta en la casa vecina del médico: $P_5 + 1 = M_4$. Asumiendo la casa vecina como la casa siguiente.
- El noruego no es vecino directo del chileno: $|N_4 - N_5| \neq 1$

2.2. Ejercicio 6: Coloreo de Grafos

Defina variables, dominios, restricciones y relaciones según el siguiente mapa de coloreo. Asuma los colores rojo, verde y azul, y que ninguna región puede estar adyacente a una con el mismo color.



SOLUCIÓN Ejercicio 6

Variables:

X_i : Color que se le asigna a la ciudad i

Restricciones

$$X_{WA} \neq X_{NT}$$

$$X_{WA} \neq X_{SA}$$

$$X_{NT} \neq X_{SA}$$

$$X_{NT} \neq X_Q$$

$$X_{SA} \neq X_Q$$

$$X_{SA} \neq X_{NSW}$$

$$X_{SA} \neq X_V$$

$$X_{NSW} \neq X_V$$

2.3. Ejercicio 7: Trenes y Locomotoras

Se tienen 4 trenes, T1, T2, T3 y T4. Además, se tienen 3 locomotoras, L1, L2 y L3. La siguiente tabla muestra la planificación horaria de cada tren:

Tren	En uso
T1	8am-10am
T2	9am-1pm
T3	12am-2pm
T4	11am-3pm

Se debe cumplir, además:

- Cada tren debe ser tirado por una locomotora
- Cada locomotora puede tirar solo un tren a la vez
- Si una locomotora no está en uso, se puede usar inmediatamente para servir cualquier tren
- L3 no es lo suficientemente potente para tirar el T3
- L2 y L3 son insuficientes para remolcar el tren T4

SOLUCIÓN Ejercicio 7

Variable:

A_i : Locomotora asignada al tren i

Así el dominio de A_i es el conjunto $\{1, 2, 3\}$ donde $i = \{1, 2, 3, 4\}$

Restricciones:

- Cada tren debe ser tirado por una locomotora : Se cumple implícitamente con la definición de las variables
- Cada locomotora puede tirar solo un tren a la vez : $A_1 \neq A_2$; $A_1 \neq A_3$; $A_2 \neq A_3$; $A_2 \neq A_4$, $A_3 \neq A_4$
- L3 no es lo suficientemente potente para tirar el T3 : $A_3 \neq 3$
- L2 y L3 son insuficientes para remolcar el tren T4 : $A_4 \neq 2$; $A_4 \neq 3$

2.4. Ejercicio 8: Daniela, Consuelo y Catalina

Daniela, Consuelo y Catalina nacieron y viven en ciudades diferentes (Valparaíso, Valdivia y Santiago).

Además, ninguna vive en la ciudad donde nació. Daniela es más alta que la que vive en Valdivia. Catalina es cuñada de la que vive en Santiago. La que vive en Valdivia y la que nació en Valparaíso tienen nombres que comienzan por distinta letra. La que nació en Valparaíso y la que vive ahora en Santiago tienen nombres que comienzan por la misma letra. Formule un modelo lineal que le permita saber donde nació y vive cada una.

SOLUCIÓN Ejercicio 8

Dado que necesitamos saber donde nació y vive cada una, esto nos plantea dos variables de inmediato. Además, hay ciertas frases que relacionan a las 3 mujeres, y como deseamos saber lo anterior, necesitamos los nombres. Dado que no existe función objetivo, se modela como CSP:

- N_i : Ciudad natal. {Valparaíso, Valdivia, Santiago}
- V_i : Ciudad de residencia actual. {Valparaíso, Valdivia, Santiago}
- M_i : Nombre. {Daniela, Consuelo, Catalina}

Se analiza cada frase para obtener las restricciones:

- *Daniela es más alta que la que vive en Valdivia.* Esto dice que Daniela NO vive en Valdivia:
 $M_1 \neq V_2$
- *Catalina es cuñada de la que vive en Santiago.* Esto dice que Catalina NO vive en Santiago:
 $M_3 \neq V_3$
- *La que vive en Valdivia y la que nació en Valparaíso tienen nombres que comienzan por distinta letra.* Esto dice que la persona que vive en Valdivia es distinta a la que nació en Valparaíso:
 $V_2 \neq N_1$
- *La que nació en Valparaíso y la que vive ahora en Santiago tienen nombres que comienzan por la misma letra..* Esto significa que tanto Catalina como Consuelo pueden haber nacido en Valparaíso y pueden vivir ahora en Santiago, por ende, Daniela no nació en Valparaíso o vive en Santiago:
 $M_1 \neq N_1$ y $M_1 \neq V_3$
- *Ninguna vive en la ciudad donde nació.* Simples relaciones para las variables que definimos:
 $N_1 \neq V_1 ; N_2 \neq V_2 ; N_3 \neq V_3$