

1. Modelado

En general tendremos dos clasificaciones de problemas de modelado: Problemas de Optimización (PL, PLE, PLEM o PNL) y Problemas de Satisfacción de Restricciones (CSP). Su diferencia característica es la existencia de una función objetivo en los problemas de optimización la cual debe ser optimizada, en contraste los CSP solo requieren la satisfacción de sus restricciones.

Una solución a un problema será la asignación de valores a las variables que satisface todas las restricciones. Resolver un CSP consistirá en encontrar una solución o determinar que el problema no tiene solución. Resolver un problema de optimización consistirá en encontrar aquella solución que optimice (minimice o maximice dependiendo del problema) la función objetivo o determinar que el problema no tiene solución.

Un problema de optimización constara de:

- Función objetivo: representa lo que se desea optimizar.
- Variables: decisiones que se pueden manipular y manejar para afectar el valor de la función objetivo. Se debe indicar su naturaleza
- Restricciones: limitaciones a las cuales están sujetas las variables.
- Constantes/Parámetros: valores conocidos a priori de ciertos atributos que hacen mas fácil el modelamiento y definen una instancia del problema.

1.1. Ejercicio 1

Una refinería de petróleos produce dos tipos de gasolina sin plomo: regular y extra, los cuales vende a su cadena de estaciones de servicio en US\$12 y US\$14 por barril, respectivamente. Ambos tipos se preparan del inventario de petróleo nacional refinado y de petróleo importado refinado que tiene la refinería y deben cumplir las especificaciones que se presentan en la siguiente tabla:

	Presión máxima de vapor	Octanaje mínimo	Demanda máxima [barril/semana]	Entregas mínimas [barril/semana]
Regular	23	88	100.000	50.000
Extra	23	93	20.000	5.000

Las características del inventario de petróleos refinados se muestran en la siguiente tabla:

	Presión de vapor	Octanaje	Inventario [barril]	Costo [US\$/barril]
Nacional	25	87	40.000	8
Importado	15	98	60.000	15

Formule un modelo que permita maximizar la ganancia semanal de la refinería.

Solución: Modelo: Para poder formular un modelo para el problema supondremos que no existen pérdidas en el proceso de refinamiento y que tanto el octanaje como la presión de vapor se pueden mezclar linealmente.

De acuerdo al supuesto anterior debemos definir variables que nos permitan controlar que proporción de cada tipo de petróleo se empleará para fabricar cada tipo de gasolina, así:

x_{ij} = cantidad de petróleo refinado tipo i ($i = 1, 2$) para fabricar gasolina j ($j = 1, 2$)

Donde petróleo refinado de tipo 1 corresponde al Nacional y el tipo 2 al Importado, gasolina 1 equivale a Regular y gasolina 2 a Extra. Consideremos las variables anteriores en barriles, de modo de emplear las proporciones entregadas en el enunciado.

Como se conoce el precio de venta de cada gasolina y el costo de cada petróleo, la función objetivo se reduce a maximiar la diferencia entre ingresos y costos, es decir, las utilidades.

$$Max \ 12(x_{11} + x_{21}) + 14(x_{12} + x_{22}) - 8(x_{11} + x_{12}) - 15(x_{21} + x_{22})$$

A continuación construimos las restricciones. Las restricciones respecto de inventario disponible y demanda de cada tipo de gasolina se explican por sí solas:

$$x_{11} + x_{12} \leq 40000 \text{ (Inventario petróleo tipo 1)}$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 60000 \text{ (Inventario petróleo tipo 2)}$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 50000 \text{ (Demanda mínima gasolina tipo 1)}$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 100000 \text{ (Demanda máxima gasolina tipo 1)}$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 5000 \text{ (Demanda mínima gasolina tipo 2)}$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 20000 \text{ (Demanda máxima gasolina tipo 2)}$$

Las restricciones de presión de vapor y de octanaje mínimo deben ser normalizadas respecto de la cantidad total fabricada, que no es necesariamente la cantidad máxima o mínima posible de fabricar.

$$\frac{25x_{11} + 15x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \leq 23 \text{ (Presión de vapor máxima gasolina tipo 1)}$$

$$\frac{25x_{12} + 15x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \leq 23 \text{ (Presión de vapor máxima gasolina tipo 2)}$$

$$\frac{87x_{11} + 98x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \geq 88 \text{ (Octanaje mínimo gasolina tipo 1)}$$

$$\frac{87x_{12} + 98x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \geq 88 \text{ (Octanaje mínimo gasolina tipo 2)}$$

Finalmente, el modelo queda completo con las condiciones de signo:

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+ \ \forall i, j \in \{1, 2\}$$

1.2. Ejercicio 2

Un excursionista planea salir de campamento. Hay 5 artículos que desea llevar consigo, pero entre todos sobrepasan los 30 kilogramos que puede cargar. Construya un modelo que permita llevar la mayor cantidad de artículos útiles. La utilidad se representa en la siguiente tabla:

Artículo	1	2	3	4	5
Peso	21	13	11	8	3
Utilidad	100	60	70	15	15

Se define la variable: $X_i = 1$ si se elige el elemento i , $\forall i \in 1, \dots, 5$. 0 en caso contrario.

La función objetivo es maximizar la utilidad. Ponderamos: $Max 100X_1 + 60X_2 + 70X_3 + 15X_4 + 15X_5$

La única restricción es el peso máximo que puede soportar la mochila: $21X_1 + 13X_2 + 11X_3 + 8X_4 + 3X_5 \leq 30$

Notar que las variables son binarias por lo que se tiene que $X_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1.3. Ejercicio 3

El mismo excursionista del ejercicio anterior planea salir de campamento esta vez con amigos, pero esta indeciso de cuántos amigos llevar. Como ahora se deberá llevar más comida y agua, el excursionista no podrá llevar ninguno de los 5 artículos útiles, pero estima que sus amigos le ayudaran a cargarlos por lo que ahora se pueden llevar todos los artículos. Cada uno de sus amigos podrá llevar a lo mucho solo 25 kilogramos. El excursionista ha estimado que cada amigo extra que lleve le costará \$5000. Construya un modelo que permita llevar todos los artículos minimizando el costo.

Se definen las variables:

- X_{ij} si es que el amigo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ lleva el artículo $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Y_i si es que va el amigo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Definimos la siguientes constantes para peso:

- El peso de cada artículo: $P_j \in \mathbb{Z}_0^+ \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con $P_1 = 21, P_2 = 13, P_3 = 11, P_4 = 8, P_5 = 3$
- El peso máximo: $P_{max} \in \mathbb{Z}_0^+$ con $P_{max} = 25$
- Costo de llevar un amigo: $C \in \mathbb{Z}_0^+$ con $C = 5000$

La función objetivo es minimizar el coste:

$$\text{Min } C \sum_{i=1}^5 Y_i$$

El problema esta sujeto a:

- El peso máximo que puede llevar cada amigo

$$\sum_{j=1}^5 P_j X_{ij} \leq P_{max} Y_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Que se deben llevar todos los artículos y solo se puede llevar uno de cada artículo

$$\sum_{i=1}^5 X_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Notar que las variables son binarias por lo que se tiene que $X_{ij} \in \{0, 1\}, Y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1.4. Ejercicio 4

La sala de emergencias de un hospital necesita tener doctores disponibles, para que exista un individuo calificado cada vez que se requiera realizar un procedimiento. Para cada doctor disponible, el salario y su disponibilidad es conocida. Modele de tal forma que los doctores elegidos cumplan con la cobertura de todos los procedimientos, minimizando los sueldos.

	Doc 1	Doc 2	Doc 3	Doc 4	Doc 5	Doc 6
Procedimiento 1	✓			✓		
Procedimiento 2	✓				✓	
Procedimiento 3		✓	✓			
Procedimiento 4	✓					✓
Procedimiento 5		✓	✓			✓
Procedimiento 6		✓				

Sea $a_{ij} = 1$ si el doctor j puede realizar el procedimiento i y $a_{ij} = 0$ si no. Además, sea c_j el pago del doctor j por estar disponible para el procedimiento.

Sea la variable $x_j = 1$ si se contrata al doctor j y 0 de otra forma.

Formulación:

- $Min \sum_{j=0}^n c_j x_j$ (Pagos)
- $\sum_{j=0}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i$ (Al menos un doctor para cada procedimiento i)
- $x_j \in \{0, 1\}$
- $j = 1, \dots, n = 6 ; i = 1, \dots, m = 6$

1.5. Ejercicio 5

El problema de la cebra: cinco hombres de distintas nacionalidades viven en las 5 primeras casas distintas de una calle. Cada uno tiene una profesión, un animal favorito, una bebida favorita (cada uno diferente de los otros). Se sabe que:

- El inglés vive en la casa roja
- El español tiene un perro
- El japonés es pintor
- El noruego vive en la primera casa de la izquierda
- El propietario de la casa verde bebe café
- La casa azul está a la derecha de la blanca
- El escultor cría caracoles
- El diplomático vive en la casa amarilla
- En la casa central beben leche
- La casa del dueño del gato está al lado de la del bebedor de té
- El violinista bebe jugo de fruta
- El zorro esta en la casa vecina del médico
- El noruego no es vecino directo del chileno

Formule el modelo que permita determinar quien es el dueño de la cebra, y quien bebe agua. Primero, se establecen las variables del CSP, y sus respectivos dominios:

- Nacionalidad $N_i, i \in \{Ingles, Español, Japones, Noruego, Chileno\}$
- Mascota $M_i, i \in \{Perro, Caracoles, Gato, Zorro, Cebra\}$
- Bebida $B_i, i \in \{Cafe, Te, Leche, Jugo, Agua\}$
- Color $C_i, i \in \{Roja, Verde, Azul, Amarilla, Blanca\}$
- Profesión $P_i, i \in \{Pintor, Escultor, Diplomatico, Violinista, Medico\}$

Cada variable debe ser distinta al resto:

- $N_i \neq N_j \forall i \neq j$
- $M_i \neq M_j \forall i \neq j$

- $B_i \neq B_j \forall i \neq j$
- $C_i \neq C_j \forall i \neq j$
- $P_i \neq P_j \forall i \neq j$

Luego, se modela cada restricción dependiendo de las variables que se relacionan. Asumimos que las casas están numeradas del 1 al 5, de izquierda a derecha:

- El inglés vive en la casa roja: $N_1 = C_1$
- El español tiene un perro: $N_2 = M_1$
- El japonés es pintor: $N_3 = P_1$
- El noruego vive en la primera casa de la izquierda: $N_4 = 1$
- El propietario de la casa verde bebe café: $C_2 = B_1$
- La casa azul está a la derecha de la blanca: $C_3 = C_5 + 1$
- El escultor cría caracoles: $P_2 = M_2$
- El diplomático vive en la casa amarilla: $P_3 = C_4$
- En la casa central beben leche: $B_3 = 3$
- La casa del dueño del gato está al lado de la del bebedor de té: $|M_3 - B_2| = 1$
- El violinista bebe jugo de fruta: $P_4 = B_4$
- El zorro esta en la casa vecina del médico: $|P_5 - M_4| = 1$.
- El noruego no es vecino directo del chileno: $|N_4 - N_5| \neq 1$

Por último el modelo esta completo señalando la naturaleza de las variables:

- $N_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $M_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $B_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $C_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $P_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1.6. Ejercicio 6

Defina el modelo del siguiente problema CSP según el mapa de coloreo adjunto. Asuma que el conjunto de colores contiene rojo, verde y azul, y que ninguna región puede estar adyacente a otra con el mismo color.



Definiendo:

- Variables: WA, NT, Q, NSW, V, SA, T
- Dominios: $D = \text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}$
- Restricciones: las regiones adyacentes deben tener colores distintos. Por ejemplo: $WA \neq NT$

1.7. Ejercicio 7

Se tienen 4 trenes, T1, T2, T3 y T4. Además, se tienen 3 locomotoras, L1, L2 y L3. La siguiente tabla muestra la planificación horaria de cada tren:

Tren	En uso
T1	8am-10am
T2	9am-1pm
T3	12am-2pm
T4	11am-3pm

Se debe cumplir, además:

- Cada tren debe ser tirado por una locomotora

- Cada locomotora puede tirar solo un tren a la vez
- Si una locomotora no esta en uso, se puede usar inmediatamente para servir cualquier tren
- L3 no es lo suficientemente potente para tirar el T3
- L2 y L3 son insuficientes para remolcar el tren T4

Modele el CSP.

En primera instancia, se definen las variables:

- A_i : Locomotora asignada al tren i , donde $i = 1, 2, 3, 4$ y $A_i = 1, 2, 3$

Las restricciones quedan, entonces:

- Cada tren debe ser tirado por una locomotora : Se cumple implícitamente con la definición de las variables
- Cada locomotora puede tirar solo un tren a la vez : $A_1 \neq A_2$; $A_1 \neq A_3$; $A_2 \neq A_3$; $A_2 \neq A_4$, $A_3 \neq A_4$
- L3 no es lo suficientemente potente para tirar el T3 : $A_3 \neq 3$
- L2 y L3 son insuficientes para remolcar el tren T4 : $A_4 \neq 2$; $A_4 \neq 3$

1.8. Ejercicio 8

Daniela, Consuelo y Catalina nacieron y viven en ciudades diferentes (Valparaíso, Valdivia y Santiago). Además, ninguna vive en la ciudad donde nació. Daniela es más alta que la que vive en Valdivia. Catalina es cuñada de la que vive en Santiago. La que vive en Valdivia y la que nació en Valparaíso tienen nombres que comienzan por distinta letra. La que nació en Valparaíso y la que vive ahora en Santiago tienen nombres que comienzan por la misma letra. Formule un modelo lineal que le permita saber dónde nació y vive cada una.

Dado que necesitamos saber dónde nació y vive cada una, esto nos plantea dos variables de inmediato. Además, hay ciertas frases que relacionan a las 3 mujeres, y como deseamos saber lo anterior, necesitamos los nombres. Dado que no existe función objetivo, se modela como CSP:

- N_i : Ciudad natal $i \in \{\text{Valparaíso, Valdivia, Santiago}\}$
- V_i : Ciudad de residencia actual $i \in \{\text{Valparaíso, Valdivia, Santiago}\}$
- M : Conjunto de nombres $M = \{\text{Daniela, Consuelo, Catalina}\}$. Definimos $M_1 = \text{Daniela}$, $M_2 = \text{Consuelo}$, $M_3 = \text{Catalina}$

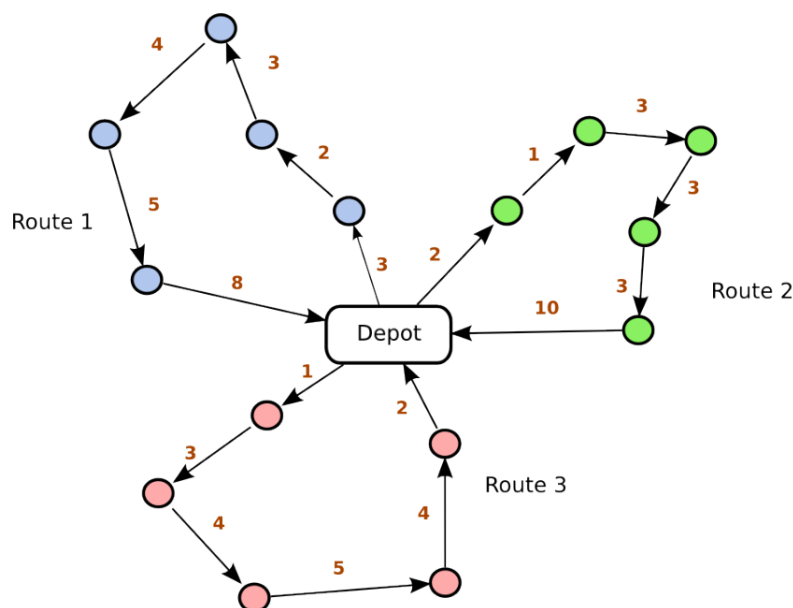
Notar que: $N_i, V_i \in M$

Se analiza cada frase para obtener las restricciones:

- *Daniela es más alta que la que vive en Valdivia.* Esto dice que Daniela NO vive en Valdivia:
 $M_1 \neq V_2$
- *Catalina es cuñada de la que vive en Santiago.* Esto dice que Catalina NO vive en Santiago:
 $M_3 \neq V_3$
- *La que vive en Valdivia y la que nació en Valparaíso tienen nombres que comienzan por distinta letra.* Esto dice que la persona que vive en Valdivia es distinta a la que nació en Valparaíso:
 $V_2 \neq N_1$
- *La que nació en Valparaíso y la que vive ahora en Santiago tienen nombres que comienzan por la misma letra.* Esto significa que tanto Catalina como Consuelo pueden haber nacido en Valparaíso y pueden vivir ahora en Santiago, por ende, Daniela no nació en Valparaíso o vive en Santiago:
 $M_1 \neq N_1$ y $M_1 \neq V_3$
- *Ninguna vive en la ciudad donde nació.* Simples relaciones para las variables que definimos:
 $N_1 \neq V_1$; $N_2 \neq V_2$; $N_3 \neq V_3$
- *Las personas son distintas entre sí* $N_i \neq N_j \forall i \neq j$ y $V_i \neq V_j \forall i \neq j$

1.9. Ejercicio Propuesto 1

The Vehicle Routing Problem. El objetivo es minimizar el costo de distribución para los distribuidores individuales, y puede ser descrito como el "problema de asignar la entrega o lista de rutas desde un almacén o punto inicial, a un número de clientes en distintos lugares geográficos. Todo esto sujeto a condiciones y restricciones de despacho."



El problema básico se define con el grafo dirigido $G = (V, A)$, donde $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ es el conjunto de vértices representando a los N clientes, v_1 es el almacén, donde están M vehículos idénticos, cada uno con capacidad Q , $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ son las rutas conectando los vértices. Cada vértice, excepto el almacén, tienen una demanda no-negativa q_i y un tiempo de servicio no-negativo s_i . C_{ij} es el costo del viaje o tiempo del viaje.

El VRP básico consiste en enrutar los vehículos, una ruta para cada uno, partiendo y terminando en el almacén. Esto, para que todos los clientes tengan satisfechas sus demandas y el tiempo total de viaje sea minimizado.

Defina el modelo.

1.10. Ejercicio Propuesto 2

El Meeting Scheduling Problem es un problema de toma de decisiones que afecta a varias personas, en el cual es necesario decidir “cuándo?” y “dónde?” deberán ser planificadas un conjunto de reuniones. Considere los siguientes parámetros del problema.

- El conjunto de personas: $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$
- El conjunto de reuniones: $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$
- El conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ de los k grupos de personas que deben asistir a cada reunión, i.e, las personas en a_i deben participar en la reunión r_i , $1 \leq i \leq k$ y $a_i \subseteq P$.
- El conjunto de lugares donde las reuniones pueden ser planificadas: $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$. La matriz $T = \{t_{ij}\}$ indica el tiempo necesario para ir desde el lugar l_i al l_j .

La planificación de las reuniones está sujeta a:

- Dos reuniones con participantes en común no deben ser planificadas al mismo tiempo.
- Cada persona p_i que participa en la reunión r_j debe tener suficiente tiempo para llegar al lugar donde se realiza su siguiente reunión.

Defina el modelo.